Auxiliar 6

P1

a) Debido a que trabajamos en un cilindro (y nos dan una expresión de z en función de θ), usamos coord. cilíndricas.

Para este problema es importante recordar que la normal es perpendicular a la superficie/trayectoria por la que se mueve la masa, por lo que necesitamos calcular el vector tangente a la trayectoria, ya que así podemos imponer que $\vec{N}\cdot\hat{t} = 0$ (perpendiculares).

Usamos la fórmula

$$\hat{t} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

donde la velocidad en cilíndricas, con $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$, $\rho = R_0$ y $z = h - \theta R_1 \Rightarrow \dot{z} = -\dot{\theta} R_1$, es

$$\vec{v} = \cancel{\dot{\rho}\hat{\rho}} + \rho\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{k} = R_0\dot{\theta}\hat{\theta} - \dot{\theta}R_1\hat{k} \Rightarrow \|\vec{v}\| = \sqrt{R_0^2\dot{\theta}^2 + R_1^2\dot{\theta}^2} = \dot{\theta}\sqrt{R_0^2+R_1^2}$$

$$\Rightarrow \hat{t} = \frac{R_0\dot{\theta}\hat{\theta} - R_1\dot{\theta}\hat{k}}{\dot{\theta}\sqrt{R_0^2+R_1^2}} = \frac{R_0}{\sqrt{R_0^2+R_1^2}}\hat{\theta} - \frac{R_1}{\sqrt{R_0^2+R_1^2}}\hat{k}$$

Ahora, la forma más general de la normal es asumiendo que tiene componentes en los 3 ejes, osea

$$\vec{N} = N_\rho\hat{\rho} + N_\theta\hat{\theta} + N_k\hat{k}\text{, imponemos } \vec{N}\cdot\hat{t} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{N}\cdot\hat{t} = \frac{N_\theta R_0}{\sqrt{R_0^2+R_1^2}} - \frac{N_z R_1}{\sqrt{R_0^2+R_1^2}} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow N_\theta = N_z\frac{R_1}{R_0}$$

$$\Rightarrow \vec{N} = N_\rho\hat{\rho} + \frac{R_1}{R_0}N_z\hat{\theta} + N_z\hat{k}$$

b) Ahora, hacemos dinámica, donde las fuerzas son: el peso $(-mg\hat{k})$, la normal $(\vec{N})$ y el roce

$$m\left((\cancel{\ddot{\rho}} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (\cancel{2\dot{\rho}}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{k}\right) = -mg\hat{k} + N_\rho\hat{\rho} + \frac{R_1}{R_0}N_z\hat{\theta} + N_z\hat{k} - c(\dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{k})$$

$$\Rightarrow m(-R_0\dot{\theta}^2\hat{\rho} + R_0\ddot{\theta}\hat{\theta} - \ddot{\theta}R_1\hat{k}) = -mg\hat{k} + N_\rho\hat{\rho} + \frac{R_1}{R_0}N_z\hat{\theta} + N_z\hat{k} - c(R_0\dot{\theta}\hat{\theta} - \dot{\theta}R_1\hat{k})$$

Con lo que las ecs. escalares son:

$\hat{\rho})$ $-mR_0\dot{\theta}^2 = N_\rho$

$\hat{\theta})$ $mR_0\ddot{\theta} = \frac{R_1}{R_0}N_z - cR_0\dot{\theta}$

$\hat{k})$ $-mR_1\ddot{\theta} = -mg + N_z + cR_1\dot{\theta}$

c) Notamos que en $\hat{\theta})$ y $\hat{k})$ tenemos N_z que no conocemos, por lo que despejamos esta componente e igualamos

$$\Rightarrow \frac{R_0}{R_1}(mR_0\ddot{\theta} + cR_0\dot{\theta}) = -mR_1\ddot{\theta} + mg - cR_1\dot{\theta}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta}\left(\frac{mR_0^2}{R_1} + mR_1\right) = \underbrace{-\left(\overbrace{\dot{\theta} - mg\left(\frac{cR_0^2}{R_1} + cR_1\right)^{-1}}^{\dot{z}}\right)\left(\frac{cR_0^2}{R_1} + cR_1\right)}_{\text{reordenamiento para hacer el C.V}}$$

que podemos resolver con polinomio característico o a lo mecánica. Hagamos el c.v.

$$\dot{z} = \dot{\theta} - mg\frac{R_1}{c}\frac{1}{(R_0^2+R_1^2)} \Rightarrow \ddot{z} = \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{z}\frac{m}{\cancel{R_1}}\left(\cancel{R_0^2+R_1^2}\right) = -\dot{z}\frac{c}{\cancel{R_1}}\left(\cancel{R_0^2+R_1^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{z} = -c\dot{z}$$

$$\Rightarrow m\int_{\dot{z}_0}^{\dot{z}}\frac{d\dot{z}}{\dot{z}} = -c\int_0^t dt$$

$$\Leftrightarrow m\ln\left(\frac{\dot{z}}{\dot{z}_0}\right) = -ct$$

$$\Leftrightarrow \dot{z}(t) = z_0 e^{-\frac{c}{m}t}$$

donde como $\dot{\theta}(0)=0 \Rightarrow \dot{z}(0) = -\frac{mg}{c}R_1\frac{1}{R_0^2+R_1^2}$

$$\Rightarrow \dot{\theta}(t) - \frac{mg}{c}R_1\frac{1}{R_0^2+R_1^2} = -\frac{mg}{c}R_1\frac{1}{R_0^2+R_1^2}e^{-\frac{c}{m}t}$$

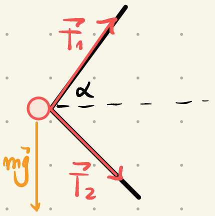
$$\Leftrightarrow \dot{\theta}(t) = \frac{mg}{c}\frac{R_1}{R_0^2+R_1^2}\left(1-e^{-\frac{c}{m}t}\right)$$

Donde notamos que sin importar el roce, la partícula nunca deja de girar ni bajar, pero alcanza una velocidad angular máxima de $mgR_1/c(R_0^2+R_1^2)$

P2

Hacemos algo similar al anterior, descomponemos las tensiones $\vec{T}_1$ y $\vec{T}_2$ en $\hat{\rho}$ y $\hat{k}$

La dinámica es:



$$m\left((\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta})\hat{\theta}+\ddot{z}\hat{k}\right)=-mg\hat{k}+\vec{T}_1+\vec{T}_2$$

$$=-mg\hat{k}+(T_1\sin\alpha-T_2\sin\alpha)\hat{k}-(T_1\cos\alpha+T_2\cos\alpha)\hat{\rho}$$

Imponiendo un mov. circ. unif. $\Rightarrow \dot{\rho}=\ddot{\rho}=0$, $\ddot{z}=0$. Las ecs. escalares quedan:

$$\hat{\rho})\ -mr_0\dot{\theta}^2=-(T_1+T_2)\cos\alpha$$

$$\hat{\theta})\ \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta})=0$$

$$\hat{k})\ 0=-mg+(T_1-T_2)\sin\alpha$$

Y la condición para que las cuerdas se mantengan tensas es que $T_1, T_2>0$. Juntemos $\hat{\rho})$ y $\hat{k})$

$$T_2=\frac{mr_0\dot{\theta}^2}{\cos\alpha}-T_1=\frac{mr_0\dot{\theta}^2}{\cos\alpha}-\frac{mg}{\sin\alpha}-T_2$$

$$\Leftrightarrow 2T_2=\frac{mr_0\dot{\theta}^2}{\cos\alpha}-\frac{mg}{\sin\alpha}>0$$

$$\Rightarrow r_0\dot{\theta}^2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-g>0$$

donde por geometría $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{H}{2r_0}$ $\Rightarrow \cancel{r_0}\dot{\theta}^2\frac{H}{2\cancel{r_0}}-g>0 \Rightarrow \dot{\theta}>\sqrt{\frac{2g}{H}}$

b) Describamos r con pitágoras

$$r^2+\frac{H^2}{4}=L^2 \Rightarrow r^2=L^2-\frac{H^2}{4}\ \Big/\frac{d}{dt}$$

$$\Rightarrow 2r\dot{r}=2L\dot{L}$$

$$=-2Lv_0$$

$$\Rightarrow \dot{r}=-\frac{v_0L}{r}\ \Big/\frac{d}{dt}$$

$$\Rightarrow \ddot{r}=-v_0\left(\frac{\dot{L}r-L\dot{r}}{r^2}\right)$$

$$=-v_0\left(-\frac{v_0}{r}+\frac{L}{r^2}\frac{v_0L}{r}\right)$$

$$=\frac{v_0^2}{r}\left(1-\frac{L^2}{r^2}\right)$$

$$=\frac{v_0^2}{r}\left(\frac{r^2-L^2}{r^2}\right)=\frac{v_0^2}{r^3}\cdot -\frac{H^2}{4}$$

$\therefore$ La cte. es $-v_0^2H^2/4$