

# Pauta Auxiliar 4

## Dinámica

**Profesor: Gonzalo Palma**

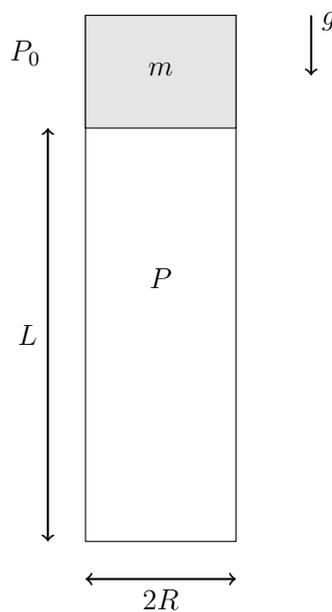
Auxiliares: Francisco Colipí, Javier Huenupi

Ayudante: Gabriel Marin, Valentina Suárez

### **P1.-** Dinámica 1D: Presión

Considere un tubo de radio interno  $R$  y largo  $L$  colocado en posición vertical, con su extremo inferior cerrado. En un cierto instante se suelta en el extremo superior del tubo (y desde el reposo) un émbolo de masa  $m$ , que se mueve hacia abajo por efecto de la gravedad, sin roce con las paredes del tubo, comprimiendo el aire encerrado por debajo de él. A medida que el aire de la cámara inferior se comprime, su presión  $P$  aumenta de modo tal que el producto entre la presión  $P$  y el volumen  $V$  de la cámara se mantiene constante ( $PV = C_0$ , con  $C_0$  conocido). La presión atmosférica fuera del tubo es igual a  $P_0$ .

- Escriba la ecuación de movimiento para el émbolo.
- Determine a que altura el émbolo alcanza su máxima velocidad.
- Determine una ecuación para encontrar la altura mínima que alcanza el émbolo sobre la base del tubo.



## Respuesta

Sabemos que la presión atmosférica genera una fuerza, constante, hacia abajo a los objetos en la Tierra. La presión dentro del tubo va aumentando cuando disminuye el volumen, y esta genera una fuerza sobre el émbolo que apunta hacia arriba, o sea, se resiste a que el émbolo baje.

La fuerza ejercida por una presión se calcula como:

$$F_P = A \cdot P,$$

donde  $P$  es la presión y  $A$  es el área sobre la cual actúa, en este caso el área de las caras del émbolo  $A = \pi R^2$ . También se tiene la fuerza ejercida por la gravedad, así que en total tenemos 3 fuerzas aplicadas sobre el émbolo:

$$\begin{aligned}\vec{F}_P &= \pi R^2 P \hat{k} \\ \vec{F}_{P_0} &= -\pi R^2 P_0 \hat{k} \\ \vec{F}_g &= -mg \hat{k}\end{aligned}$$

donde los signos están dados por hacia dónde apunta la fuerza y se elige un sistema de coordenadas cartesiano con origen en la base del tubo.

Para encontrar la expresión de la presión producida en la parte interior del tubo, bajo el émbolo, usamos la relación dada en el enunciado para la presión y el volumen, sabiendo que el volumen se calcula como  $V = \pi R^2 z$ , donde  $z$  es la altura a la que se encuentra la parte de abajo del émbolo, medido desde la base del tubo. Así que la presión quedaría como  $P = C_0/V = C_0/\pi R^2 z$ , por ende, la fuerza producida por esta presión es:

$$\vec{F}_P = \frac{C_0}{z} \hat{k}.$$

Como se ve, las fuerzas son ejercidas únicamente en el eje vertical, así que la sumatoria de fuerzas en este eje sería:

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}_i &= \vec{F}_P + \vec{F}_{P_0} + \vec{F}_g \\ &= \left[ \frac{C_0}{z} - \pi R^2 P_0 - gm \right] \hat{k}\end{aligned}$$

Utilizando la segunda ley de Newton,  $\vec{F} = m\vec{a}^1$ , obtenemos nuestra **ecuación de movimiento** para el émbolo

$$\boxed{m\ddot{z} = \frac{C_0}{z} - \pi R^2 P_0 - gm.} \quad (1)$$

Para bajar órdenes (calcular la velocidad y posición), utilizamos **el truco de mecánica** para la segunda derivada de la posición  $z$ ,

$$m\dot{z} \frac{dz}{dz} = \frac{C_0}{z} - \pi R^2 P_0 - gm,$$

e integramos utilizando como posición inicial  $z_0 = L$ , que es desde donde se suelta el émbolo con

<sup>1</sup> Y olvidándonos de los vectores unitarios solo tenemos fuerzas y movimiento en  $\hat{k}$

velocidad inicial  $\dot{z}_0 = 0$  ya que se suelta desde el reposo,

$$\begin{aligned}
 m \int_{\dot{z}_0}^{\dot{z}} \dot{z} \frac{d\dot{z}}{dz} dz &= \int_{z_0}^z \left( \frac{C_0}{z} - \pi R^2 P_0 - gm \right) dz \\
 \Rightarrow m \int_0^{\dot{z}} \dot{z} d\dot{z} &= \int_L^z \frac{C_0}{z} dz - (\pi R^2 P_0 + gm) \int_L^z dz \\
 \Leftrightarrow m \frac{\dot{z}^2}{2} &= C_0 \ln \frac{z}{L} - (\pi R^2 P_0 + gm)(z - L). \tag{2}
 \end{aligned}$$

Ahora, para encontrar los máximos y mínimos que nos piden, igualamos a 0 las derivadas de estas cantidades. Si una curva tiene una forma cóncava (carita triste :C) el punto en el que la derivada es 0 corresponde al máximo, mientras que si una curva es convexa (carita feliz C:), la derivada es 0 en el mínimo.

Entonces, para encontrar la altura donde la velocidad es máxima ocupamos la derivada de esta con respecto al tiempo, o sea, la aceleración de la ecuación (1):

$$\begin{aligned}
 \frac{d\dot{z}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \ddot{z} = 0 &\Rightarrow \frac{C_0}{z_{v_{\text{máx}}}} - \pi R^2 P_0 - gm = 0 \\
 \Rightarrow z_{v_{\text{máx}}} &= \frac{C_0}{\pi R^2 P_0 + mg}.
 \end{aligned}$$

Y por último, para calcular la altura mínima, ocupamos dónde la velocidad se hace 0 (donde deja de bajar) utilizando la expresión de (2)

$$\frac{dz}{dt} = 0 \Leftrightarrow \dot{z} = 0 \Rightarrow C_0 \ln \frac{z_{\text{mín}}}{L} - (\pi R^2 P_0 + gm)(z_{\text{mín}} - L) = 0,$$

que se puede calcular numéricamente (o sea, utilizando computadores) para constantes dadas.

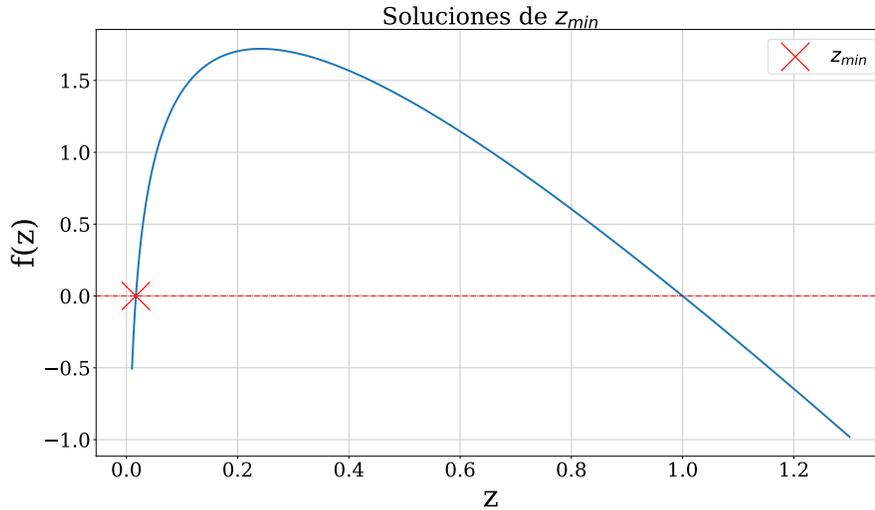


Figura 1: Definimos  $f(z) \equiv C_0 \ln \frac{z}{L} - (\pi R^2 P_0 + gm)(z - L)$ . Buscamos los puntos donde esta función es 0. Debemos tomar la primera intersección con el eje  $x$ , ya que el otro punto corresponde al punto más alto (donde la derivada también es 0).

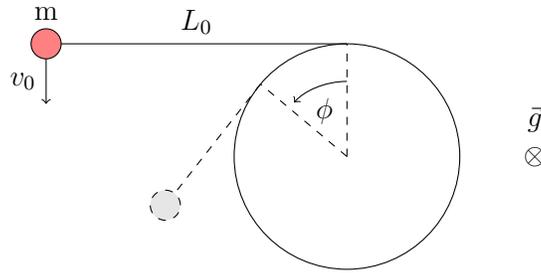
**P2.- Dinámica 2D:** Un pequeño cambio a las coordenadas

Considere un poste de sección circular de radio  $R$  colocado verticalmente sobre una superficie horizontal. Una partícula de masa  $m$  se encuentra atada a una cuerda de largo  $L_0$ , cuyo otro extremo se encuentra fijo al poste. El roce entre la partícula y la **superficie horizontal** es despreciable. En un cierto instante, cuando la cuerda se encuentra estirada y en una dirección tangente al poste, se da a la partícula una velocidad inicial  $v_0$ , en dirección perpendicular a la cuerda estirada, como se indica en la Figura.

- Determine la ecuación de movimiento de la partícula  $m$  en un sistema de coordenadas conveniente (ver **Hint**).
- Obtenga la velocidad angular  $\dot{\phi}$  en función del ángulo  $\phi$  (ángulo de enrollado de la cuerda).
- Suponga que la cuerda se corta cuando la tensión alcanza el valor  $T_{\max}$ , obtenga el ángulo  $\phi$  de enrollado de la cuerda en ese momento.

**Hint:** Considere hacer un cambio a las coordenadas cilíndricas de la forma

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{k} \rightarrow \vec{r} = R\hat{\rho} + L(\phi)\hat{\phi} + z\hat{k}$$



## Respuesta

Usamos coordenadas cilíndricas para definir la posición de la masa. El origen del sistema lo ponemos en el centro del círculo y utilizamos el **Hint**. Para definir la posición, nos *movemos*  $R$  en la dirección de  $\hat{\rho}$  para llegar al punto donde se separa la cuerda del poste y luego nos *movemos*  $L(\phi)$  en  $\hat{\phi}$ , que sería en la dirección de la cuerda hasta llegar a la partícula.

Tenemos que dado un ángulo  $\phi$ , habría  $R\phi$  de cuerda enrollada (el arco), que es la porción que debemos restarle a  $L_0$ , o sea

$$\vec{r} = R\hat{\rho} + (L_0 - R\phi)\hat{\phi},$$

Importante notar que no hay componente de altura<sup>2</sup>, ya que la masa está en contacto con la superficie horizontal y la normal de esta contrarresta la fuerza de gravedad, así que siempre trabajamos en un plano.

Derivamos  $\vec{r}$  con respecto al tiempo,

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= R\dot{\phi}\hat{\phi} - R\dot{\phi}\hat{\phi} - (L_0 - R\phi)\dot{\phi}\hat{\rho} \\ &= -(L_0 - R\phi)\dot{\phi}\hat{\rho}. \end{aligned}$$

<sup>2</sup> Más bien, podemos definir la altura siempre como  $z = 0$

Recordar:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \dot{\phi}\hat{\phi}, \quad \frac{d\hat{\phi}}{dt} = -\dot{\phi}\hat{\rho}$$

Derivamos nuevamente para encontrar la aceleración:

$$\begin{aligned} \vec{r}'' &= R\dot{\phi}^2\hat{\rho} - (L_0 - R\phi)\ddot{\phi}\hat{\rho} - (L_0 - R\phi)\dot{\phi}^2\hat{\phi} \\ &= (R\dot{\phi}^2 - L_0\ddot{\phi} + R\ddot{\phi}\phi)\hat{\rho} - (L_0 - R\phi)\dot{\phi}^2\hat{\phi}, \end{aligned} \quad (3)$$

que utilizaremos en la ecuación de movimiento.

Ahora, analizando las fuerzas en los distintos componentes, tenemos:

- $\hat{\rho}$ : No hay fuerzas
- $\hat{\phi}$ : La tensión de la cuerda
- $\hat{k}$ : Fuerza de gravedad y la normal de la superficie horizontal, que son iguales en magnitud, pero distinto signo, por lo que se anulan (no atraviesa la superficie ni comienza a subir)

Usando segunda Ley de Newton  $\vec{F} = m\vec{a}$ , obtenemos

$$\Rightarrow m(R\dot{\phi}^2 - L_0\ddot{\phi} + R\ddot{\phi}\phi)\hat{\rho} - m(L_0 - R\phi)\dot{\phi}^2\hat{\phi} = 0\hat{\rho} - T\hat{\phi}, \quad (4)$$

donde la tensión va en el sentido contrario hacia donde crece  $\phi$  (jala a la masa). Ahora debemos igualar las componentes que acompañan a los mismos vectores unitarios de (4),

$$\boxed{m(R\dot{\phi}^2 - L_0\ddot{\phi} + R\ddot{\phi}\phi) = 0}, \quad \boxed{-m(L_0 - R\phi)\dot{\phi}^2 = -T}, \quad (5)$$

con lo que conseguimos nuestras **ecuaciones de movimiento**.

Cuando una expresión está igualada a 0, sospechamos que hay cosas que se conservan (a veces no es tan directo y debemos mover algunas cosas), así que notamos que la primera expresión de (5) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} R\dot{\phi}^2 - L_0\ddot{\phi} + R\ddot{\phi}\phi &= \frac{d}{dt}(-\dot{\phi}L_0 + R\dot{\phi}\phi) = 0 \\ \Rightarrow -\dot{\phi}L_0 + R\dot{\phi}\phi &= \text{constante} \end{aligned}$$

O sea,  $\dot{\phi}L_0 - R\dot{\phi}\phi$  **mantiene su valor en todo el movimiento**, así que en cualquier momento debe ser igual a sus valores iniciales.

Tenemos la condición inicial para el ángulo:  $\phi_0 = 0$  y para  $\dot{\phi}_0$  analizamos la expresión de la velocidad que expresamos al inicio

$$\vec{v} = -(L_0 - R\phi)\dot{\phi}\hat{\rho},$$

como en  $t = 0$  sabemos que la velocidad es de la forma

$$\begin{aligned} \vec{v}_0 &= -v_0\hat{\rho} \\ \Rightarrow -v_0 &= -(L_0 - R \cdot 0)\dot{\phi}_0 \\ \Rightarrow \boxed{\dot{\phi}_0 = \frac{v_0}{L_0}}. \end{aligned}$$

Con esta expresión de  $\dot{\phi}_0$  y  $\phi_0$  podemos seguir trabajando con la conservación que encontramos para

obtener una expresión de  $\dot{\phi}$ ,

$$\begin{aligned} \Rightarrow -\dot{\phi}L_0 + R\dot{\phi}\phi &= -v_0 \\ \Leftrightarrow \dot{\phi} &= \frac{v_0}{L_0 - R\phi}, \end{aligned}$$

con lo que conseguimos expresar la velocidad angular en función del ángulo.

Finalmente, en (5) tenemos una expresión para la tensión en función del ángulo y la velocidad angular, así que podemos reemplazar con lo conseguido,

$$\Rightarrow T = m(L_0 - R\phi) \left( \frac{v_0}{L_0 - R\phi} \right)^2 = \frac{mv_0^2}{L_0 - R\phi}.$$

Notamos que  $T$  crece cuando aumentamos  $\phi$  desde  $\phi_0 = 0$ , hasta que  $L_0 - R\phi_1 = 0$ , donde el valor de la tensión explota, así que, según enunciado, la cuerda se cortaría en este punto  $\phi_1 = L_0/R$ .

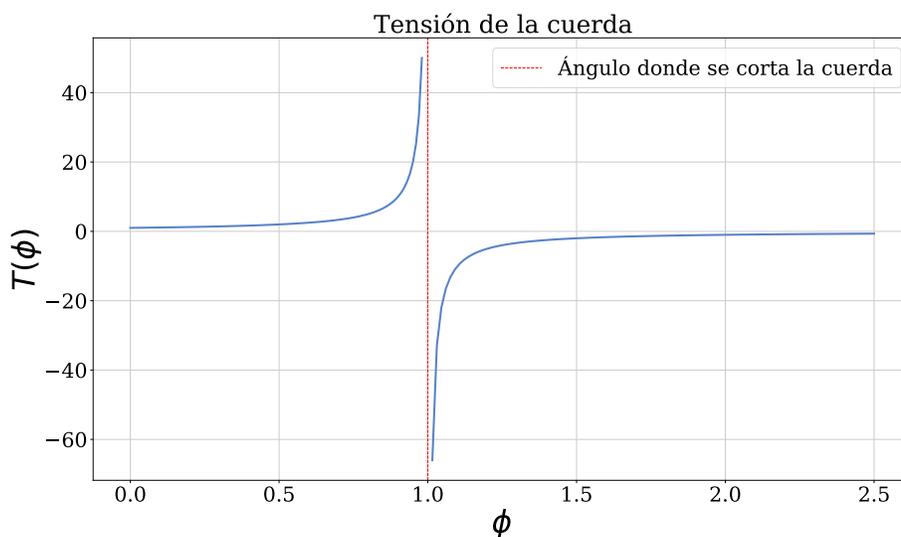


Figura 2: Forma de  $T(\phi)$ , para  $m = v_0 = R = L_0 = 1$ . En el lugar de la línea roja punteada, la cuerda se corta.