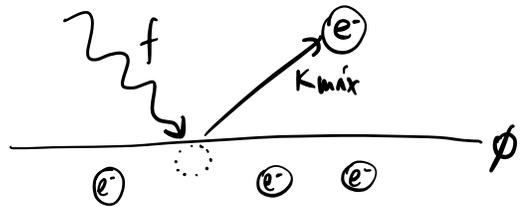


- Bibliografía :
- Sears - Zemansky
  - Serway - Jewett

Formulario (no exhaustivo, solo cosas que utilizaremos)

→ **Efecto fotoeléctrico**: emisión de electrones cuando la luz choca contra una superficie.

$$K_{\text{máx}} = E - \phi$$



donde:  $K_{\text{máx}} = \frac{1}{2} m v_{\text{máx}}^2$  es la energía cinética máxima del electrón saliente;

$E = hf = hc/\lambda$  es la **energía de un fotón**;

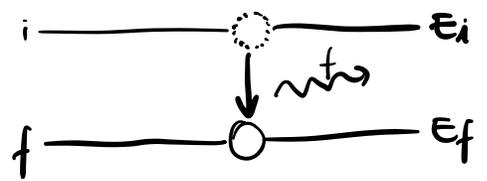
$\phi$  es la **función trabajo**: cantidad mínima de energía que debe ganar un electrón para escapar de determinada superficie.

↳ **frecuencia umbral**: frecuencia mínima dependiente del material para que se emitan fotoelectrones.

→ **Momentum de un fotón**:  $p = E/c = hf/c = h/\lambda$

→ **Emisión de fotones**: un átomo puede hacer una **transición** cayendo de un nivel de energía inicial  $E_i$  a uno final de menor energía  $E_f$ , emitiendo un fotón cuya energía es

$$E = hc/\lambda = hf = E_i - E_f$$



→ El **espectro de líneas** de un elemento es causado por la emisión de fotones con energías específicas. Cada átomo debe ser capaz de existir solo con ciertos valores **específicos** de energía interna, su conjunto de **niveles de energía** posibles.

→ **Nivel de estado fundamental**: Estado de energía interna **mínima** que puede tener el átomo. Todos los niveles más altos se llaman **niveles excitados**.

→ Niveles de energía  $E_n$  del átomo de **hidrógeno**:

$$E_n = -E_0/n^2 \quad (n=1, 2, 3, 4, \dots)$$

donde  $E_0 = 13.6 \text{ eV}$  es la **energía de ionización** del hidrógeno;  $n$  es el nivel de energía.

→ **Hipótesis de cuantización de Bohr**:

$$L_n = m v_n r_n = n \hbar, \quad n=1, 2, 3 \dots$$

→ Longitud de onda de **de Broglie** para una partícula:

$$\lambda = h/p = h/mv \quad (\text{las partículas tienen props. ondulatorias})$$

→ Principio de incertidumbre de Heisenberg: No se puede determinar simultáneamente y con precisión arbitraria ciertos pares de variables físicas.

↳ Si una coordenada  $x$  tiene una incertidumbre  $\Delta x$  y si la componente respectiva de momentum  $p_x$  tiene una incertidumbre  $\Delta p_x$ :

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$$

→ Ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x,t) + V(x,t) \Psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x,t)$$

donde  $\Psi(x,t)$  es la función de onda que contiene toda la información de la partícula.

↳  $|\Psi(x,t)|^2 dx$  es la probabilidad de que la partícula se encuentre, en el momento  $t$ , dentro de un intervalo  $dx$  en torno al punto  $x$ .

↳ Normalización:  $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dx = 1$

→ Estado estacionario: Estado con energía definida  $E$ , independiente del tiempo  $t$

$$\Psi(x, t) = \psi(x) e^{-iEt/\hbar}$$

↳ Probabilidad de hallar la partícula en el intervalo arbitrario  $a \leq x \leq b$ :  $P_{ab} = \int_a^b |\Psi|^2 dx$

↳ Valor esperado de cualquier función  $f(x)$  asociado con una partícula:  $\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* f(x) \Psi dx$

→ Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x) \psi(x) = E \psi(x)$$

donde  $V(x)$  es la energía potencial

↳ Para ser una solución de la ecuación de Schrödinger, la función de onda  $\psi(x)$  y su derivada  $d\psi(x)/dx$  deben ser continuas excepto donde  $V(x)$  sea infinito.

↳ Ansatz:  $\psi(x) = A_1 e^{+ikx} + A_2 e^{-ikx}$

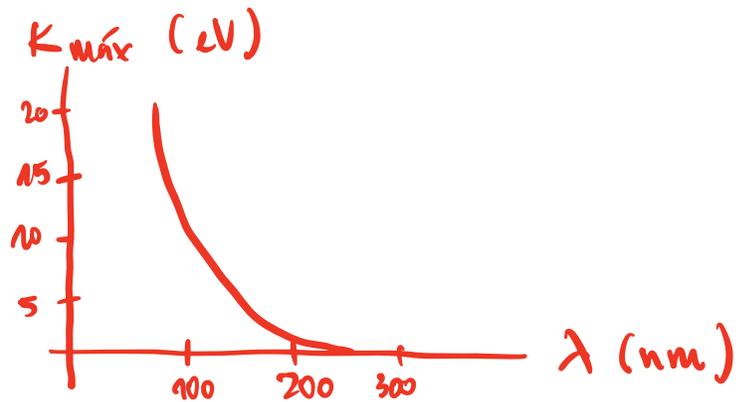
→ Partícula libre:  $V(x) = 0 \Rightarrow \psi(x) = A e^{ikx}$ ,  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

→ Partícula en una caja: Pozo cuadrado de potencial infinitamente profundo, de ancho  $L$ :  
 $V(x) = 0$  si  $0 \leq x \leq L$  y  $V(x) = \infty$  si no.

$$\Rightarrow \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad n=1, 2, 3, \dots$$

## P2 C2 2022-3

En un experimento de efecto fotoeléctrico, la energía cinética máxima de los fotoelectrones expulsados se mide para varias longitudes de onda de la luz incidente. La figura presenta una gráfica de esta energía cinética máxima  $K_{\text{máx}}$  como función de la longitud de onda  $\lambda$  de la luz que incide sobre la superficie del metal.



a) ¿Cuál es la frecuencia umbral?

Notemos en el gráfico que  $K_{\text{máx}} = 0$  eV cuando  $\lambda = 250$  nm. Aquí ocurre la frecuencia umbral  $f_0$  tal que  $\phi = hf_0$ .

$$\Rightarrow f_0 = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{250 \text{ nm}} = 1.2 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

b) ¿Cuál es la función trabajo (en electronvolts) de este metal?

Efecto fotoeléctrico:  $K_{\text{máx}} = E - \phi$ , pero como en el umbral  $K_{\text{máx}} = 0$  eV entonces  $\phi = E$  con  $E = hf_0$  la energía del fotón incidente. Así,

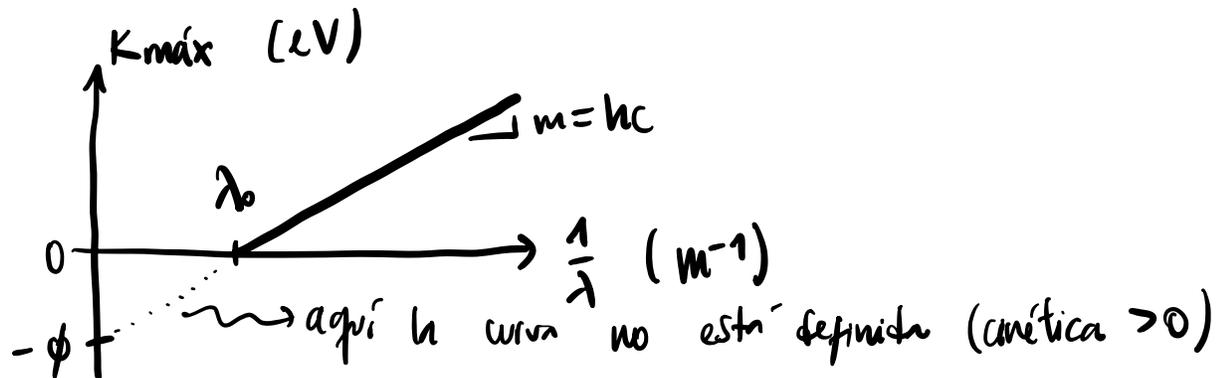
$$\phi = h f_0 = (4.1 \cdot 10^{-15} \text{ eV s})(1.2 \cdot 10^{15} \text{ Hz}) = 4.92 \text{ eV}$$

Los datos de experimentos como este a menudo se grafican presentando  $K_{\text{máx}}$  como función de  $1/\lambda$ .

c) Elabore un dibujo cualitativo (es decir, sin números) de cómo se vería esta gráfica. Identifique la longitud de onda umbral ( $\lambda_0$ ) en su dibujo.

$$\text{Efecto fotoeléctrico: } K_{\text{máx}} = E - \phi = hc \frac{1}{\lambda} - \phi$$

que es una función lineal tipo " $y = mx + b$ " para  $K_{\text{máx}}$  con respecto a  $1/\lambda$ .

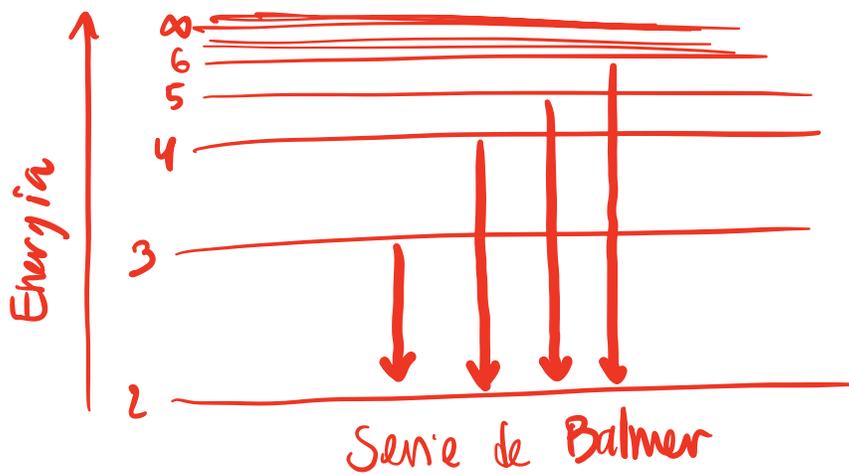


d) ¿Qué ventajas tiene graficar los datos de esta forma?

El gráfico es una función lineal fácil de interpretar. Midiendo  $K_{\text{máx}}$  y  $1/\lambda$  en un experimento de efecto fotoeléctrico, podemos obtener el valor de  $h$  con la pendiente y  $\phi$  con el intercepto del gráfico. La curva de la parte a) no muestra esto directamente.

## P2 C3 2022-2

La serie de Balmer para el átomo de hidrógeno corresponde a transiciones electrónicas que se terminan en el estado con número cuántico  $n=2$ . Considere el fotón de longitud de onda más larga correspondiente a una de las transiciones mostradas en la figura que se representan por flechas.



Para esta configuración:

a) Determine su energía.

Niveles de energía del átomo de hidrógeno:

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2} \quad \text{con } E_0 = 13.6 \text{ eV} \text{ la energía de ionización}$$

$\hookrightarrow n=1, 2, 3, \dots$  número cuántico principal del nivel

Las transiciones de la figura son  $3 \rightarrow 2$ ,  $4 \rightarrow 2$ ,  $5 \rightarrow 2$  y  $6 \rightarrow 2$ . La energía del fotón emitido es

$$E = hf = hc/\lambda = E_1 - E_2,$$

es decir,  $\lambda$  es inversamente proporcional a  $\Delta E$ .

Así, el fotón pedido con longitud de onda más larga es el con menor energía. Como  $E_n$  "aumenta" con  $n$  (va de  $-13.6$  eV a  $0$  eV) y  $E_2$  está fijo, consideramos la transición  $3 \rightarrow 2$ , con energía

$$\begin{aligned}\Delta E &= E_3 - E_2 = -\frac{13.6 \text{ eV}}{3^2} - \left(-\frac{13.6 \text{ eV}}{2^2}\right) \\ &= -1.51 \text{ eV} + 3.4 \text{ eV} = 1.89 \text{ eV}\end{aligned}$$

b) Determine su longitud de onda.

Como  $E = hc/\lambda$  para el fotón, la transición  $3 \rightarrow 2$  tiene

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{1.2 \text{ eV } \mu\text{m}}{1.89 \text{ eV}} = 635 \text{ nm}.$$

Ahora considere la línea espectral de longitud más corta correspondiente a una de las transiciones mostradas en la figura anterior que se representan por flechas. Para esto:

c) Determine su energía:

Gracias al análisis de a), sabemos que  $\lambda$  pequeño  $\iff$   $\Delta E$  grande, por lo que

ahora la transición correspondiente a longitud de onda más pequeña es  $6 \rightarrow 2$ , con energía

$$\Delta E = E_6 - E_2 = -\frac{13.6 \text{ eV}}{6^2} - \left( -\frac{13.6 \text{ eV}}{2^2} \right) \\ = -0.37 \text{ eV} + 3.4 \text{ eV} = 3.03 \text{ eV}$$

d) Determine su longitud de onda.

Análogamente, para  $6 \rightarrow 2$

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{1.2 \text{ eV } \mu\text{m}}{3.03 \text{ eV}} = 396 \text{ nm}$$

Ahora, si pudiéramos tener acceso a cualquiera de los niveles de energía posibles (no solamente los mostrados en la figura anterior), ¿cuál es la longitud de onda más corta posible en la serie de Balmer?

La serie de Balmer tiene el nivel final fijo en  $n=2$ , pero ahora el nivel inicial puede ser  $3, 4, 5, \dots, \infty$ . La longitud de onda más pequeña posible ocurre para la mayor diferencia de energía, correspondiente al menor  $E_i$  posible en magnitud. Como  $-13.6 \text{ eV} = E_1 < E_2 < E_3 < \dots < E_\infty = 0 \text{ eV}$ , la transición que nos interesa es  $\infty \rightarrow 2$ ,

$$\Delta E = E_\infty - E_2 = 0 \text{ eV} + 3.4 \text{ eV} = 3.4 \text{ eV} \Rightarrow \lambda = hc/\Delta E = 353 \text{ nm}$$

## P41.27 Serway

En una región del espacio, una partícula cuántica con energía total nula tiene una función de onda

$$\psi(x) = Ax e^{-x^2/L^2}.$$

a) Encuentre la energía potencial  $V$  como función de  $x$ .

La ec. de Schrödinger independiente del tiempo

es

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V(x) \psi(x) = \overset{0 \text{ por enunciado}}{E} \psi(x)$$

Así, despejamos  $V(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi(x)} \frac{d^2 \psi}{dx^2}$

Sabiendo que  $\psi(x) = Ax e^{-x^2/L^2}$

$$\Rightarrow \frac{d\psi}{dx} = A e^{-x^2/L^2} + Ax e^{-x^2/L^2} \left[ -\frac{2x}{L^2} \right] \text{ por cadena}$$

$$= A e^{-x^2/L^2} - \frac{2Ax^2}{L^2} e^{-x^2/L^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \psi}{dx^2} = -\frac{2Ax}{L^2} e^{-x^2/L^2} - \frac{2A}{L^2} 2x e^{-x^2/L^2} - \frac{2A}{L^2} x^2 e^{-x^2/L^2} \left[ -\frac{2x}{L^2} \right]$$

$$= -\frac{2}{L^2} \psi(x) - \frac{4A}{L^2} \psi(x) + \frac{4x^2}{L^4} \psi(x)$$

$$= 2 \left( \frac{2x^2}{L^2} - 3 \right) \psi(x) / L^2$$

Reemplazando :

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi(x)} \frac{d^2 \psi}{dx^2} \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\cancel{\psi(x)}} \cdot \frac{2}{L^2} \left( \frac{2x^2}{L^2} - 3 \right) \cancel{\psi(x)} \\ &= \frac{\hbar^2}{mL^2} \left( \frac{2x^2}{L^2} - 3 \right) \end{aligned}$$

b) Bosqueje  $V(x)$  versus  $x$ .

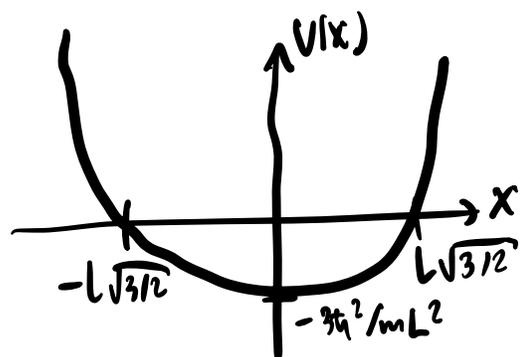
$V(x)$  tiene forma de parábola (es cuadrática en  $x$ )  
con mínimo en  $x=0$ :

$$V(x=0) = -3 \frac{\hbar^2}{mL^2}$$

y raíces en  $V(\bar{x}) = 0$  :

$$\frac{2\bar{x}^2}{L^2} - 3 = 0 \Rightarrow \bar{x} = \pm L\sqrt{\frac{3}{2}}$$

El gráfico es entonces



### P3 Ex 2022-3

Una partícula de masa  $m$  está contenida en un caja 1-dimensional impenetrable que se extiende desde  $x = -L/2$  hasta  $x = L/2$ . La partícula se encuentra en su estado basal.

a) Encuentre las autofunciones (funciones de onda) del estado basal y el primer estado excitado.

Conocemos la solución de la partícula en la caja para  $0 \leq x \leq L$  pero no para  $-L/2 \leq x \leq L/2$ .

→ El camino largo es resolver la ec. de Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V(x) \psi(x) = E \psi(x)$$

$$\text{para } V(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } x < -L/2 & \text{I} \\ 0 & \text{si } -L/2 \leq x \leq L/2 & \text{II} \\ \infty & \text{si } x > L/2 & \text{III} \end{cases}$$

Automáticamente sabemos que  $\psi(x) = 0$  para I y III.  
Para II,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + 0 = E \psi$$

$$\Rightarrow \psi'' = -k^2 \psi \quad \text{con } k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$$

que se parece al oscilador armónico por lo que consideramos el Ansatz:

$$\psi(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$$

Necesitamos que  $\psi$  sea continua, por lo que imponemos las condiciones de borde:

$$\begin{aligned} \text{Entre I y II: } \psi(-L/2) &= 0 \\ &= A \cos(-kL/2) + B \sin(-kL/2) \\ &= A \cos(kL/2) - B \sin(kL/2) \\ &\quad \text{por paridad} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Entre II y III: } \psi(L/2) &= 0 \\ &= A \cos(kL/2) + B \sin(kL/2) \end{aligned}$$

Sumando ambas ecs:

$$2A \cos(kL/2) = 0 \Rightarrow \cos(kL/2) = 0$$

$$\Rightarrow k_n L/2 = \frac{n\pi}{2} \text{ con } n=1, 3, 5, \dots$$

$$\Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$\text{Restando: } 2B \sin(kL/2) = 0 \Rightarrow \sin(kL/2) = 0$$

$$\Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L} \text{ con } n=2, 4, 6, \dots$$

Falta encontrar A y B, para lo que usamos la condición de normalización.

$$\begin{aligned}n \text{ impar: } \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n| dx &= 1 \\&= \int_{-L/2}^{L/2} \psi_n^*(x) \psi(x) dx \\&= \int_{-L/2}^{L/2} |A|^2 \cos^2(k_n x) dx \\&= |A|^2 \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1 + \cos(2k_n x)}{2} dx \\&= |A|^2 \left( \frac{x + \frac{1}{2} \sin(2k_n x)}{2} \right) \Bigg|_{x=-L/2}^{x=L/2} \\&= |A|^2 \left( \frac{L/2 + \frac{1}{2} \sin\left(2 \cdot \frac{n\pi}{L} \cdot \frac{L}{2}\right)}{2} - \frac{-L/2 + \frac{1}{2} \sin\left(2 \frac{n\pi}{L} \left(-\frac{L}{2}\right)\right)}{2} \right) \\&= |A|^2 \left( \frac{L/2 + \frac{1}{2} \cancel{\sin(n\pi)}}{2} - \frac{-L/2 - \cancel{\sin(n\pi)}}{2} \right) \\&= |A|^2 \frac{L}{2} \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{L}}\end{aligned}$$

Análogamente,  $B = \sqrt{2/L}$  ( $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$ )

Luego, las auto funciones son:

$$n \text{ impar} \rightarrow \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$n \text{ par} \rightarrow \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\therefore \text{Estado basal: } n=1 \rightarrow \psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$1^{\text{er}} \text{ Estado excitado: } n=2 \rightarrow \psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

→ El camino corto es recordar que para la caja  $0 < x < L$  tenemos

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

y solo basta hacer la traslación de coordenadas  $x \rightarrow x - L/2$  para que

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi(x - L/2)}{L}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L} - \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{L}} \left( \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right)$$

por lo que las autofunciones son:

$$n \text{ impar} \rightarrow \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$n \text{ par} \rightarrow \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Salvo un factor de fase  $(-1)^n = e^{i\theta}$ , pero como " $\psi$ " no tiene significado físico y nos importa " $|\psi|^2$ " para la probabilidad, haciendo  $\psi \rightarrow e^{i\theta}\psi$  no afecta a  $|\psi|^2 = \psi^* \psi = e^{-i\theta}\psi^* e^{i\theta}\psi = \psi^* \psi = |\psi|^2$ . ✓✓

b) Las paredes de la caja se mueven instantáneamente hacia afuera, formando una caja que se extiende ahora en  $-L \leq x \leq L$ . Calcule la probabilidad de que la partícula permanezca en el estado basal durante esta expansión súbita.

Ahora hacemos el cambio  $L \rightarrow 2L$  para que  $-L \leq x \leq L$ , y así el estado basal cambia a

$$\psi_1'(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$$

La probabilidad de la transición del estado basal al nuevo estado  $j$  es

$$P_{1j} = |I_{1j}|^2 \quad \text{con} \quad I_{1j} = \int \psi_j'^*(x) \psi_1(x) dx$$

Nos interesa  $\psi_1(x) \rightarrow \psi_1'(x)$ :

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{\sqrt{L}} \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{2} \left( \cos\left(\frac{\pi x}{2L} - \frac{\pi x}{L}\right) + \cos\left(\frac{\pi x}{2L} + \frac{\pi x}{L}\right) \right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{L\sqrt{2}} \int_0^{L/2} \left( \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) + \cos\left(\frac{3\pi x}{2L}\right) \right) dx \\
&= \frac{\sqrt{2}}{L} \left( \frac{2L}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) + \frac{2L}{3\pi} \sin\left(\frac{3\pi x}{2L}\right) \right) \Bigg|_{x=0}^{x=L/2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{L} \frac{2L}{\pi} \left( \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{L}{2}\right) + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{3\pi}{2} \cdot \frac{L}{2}\right) \right) \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \left( \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right) \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{8}{3\pi}
\end{aligned}$$

⇒ La probabilidad es  $P_{11} = \left| \frac{8}{3\pi} \right|^2 = 0.72$

c) Calcule la probabilidad de que la partícula salte desde el estado basal inicial al primer estado excitado final.

Ahora consideramos  $\psi_1(x) \longrightarrow \psi_2'(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$

y vemos que

$$\begin{aligned}
I_{12} &= \int \psi_2'^*(x) \psi_1(x) dx \\
&= \int_{-L/2}^{L/2} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}_{\text{impar}} \underbrace{\sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)}_{\text{par}} dx = 0
\end{aligned}$$

∴ La probabilidad es 0.