2023-1 FI1100-3 Introducción a la Física Moderna
Profesor: José Mella Riquelme
Auxiliares: Camilo Núñez Barra & Catalina Vargas Parra
Ayudante: Alexandra Osses Navarro

Auxiliar 2

22 de marzo de 2023

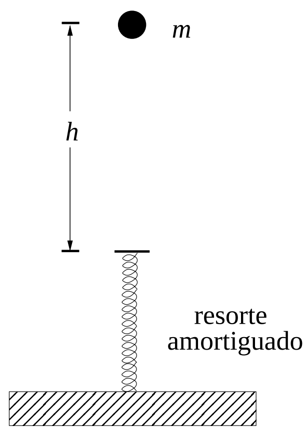
P1. Un cuerpo de masa m, después de caer una distancia h, se adosa a un resorte de constante elástica k. A partir de este momento ($t = 0$), el sistema resultante viene gobernado por la ecuación de movimiento

$$\ddot{z} + 2\omega_0\dot{z} + \omega_0^2 z = D\,,$$

donde $z = z(t)$ es la posición de la masa (medida con sentido positivo hacia arriba con respecto al punto más alto del resorte en $t = 0$) y $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia natural del resorte. Note que la constante de amortiguamiento toma un valor crítico $2\omega_0$. En este caso, la solución general tiene la forma

$$z(t) = (A + Bt)\mathrm{e}^{-\omega_0 t} + C\,,$$

donde A y B son constantes que se determinan a partir de las condiciones iniciales (forman parte de la solución homogénea) y C es una constante independiente de las condiciones iniciales (asociada a la solución particular).



a) Encuentre la posición de equilibrio de la masa.

b) Determine las constantes C y D. Relacione la posición de equilibrio con la solución particular.

c) Determine A y B a partir de las condiciones iniciales.

d) Encuentre el instante de máxima compresión del resorte.

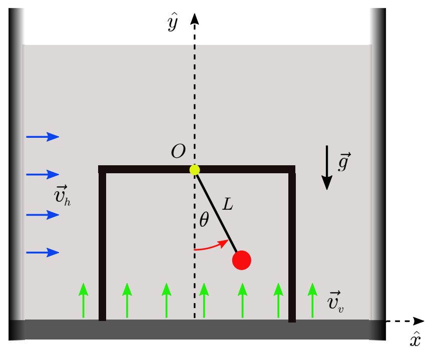
e) Gráfique esquemáticamente la solución $z(t)$ entre $t = 0$ y $t \to \infty$.

f) ¿Cuál será la energía total disipada por el amortiguador?

g) ¿Con qué frecuencia habría que forzar este sistema para obtener una amplitud de resonancia máxima?

P2. Una pequeña esfera de densidad de masa por unidad de volumen constante ρ_m y volumen V está ligada al extremo de una barra rígida de largo L y masa despreciable. La barra pivotea (es decir, puede rotar en el plano vertical) en torno a un punto fijo O de una estructura de soporte. El sistema se sumerge en un gran volumen de agua con densidad de masa por unidad de volumen constante ρ_a.

Se quiere estudiar el comportamiento del péndulo en el fluido cuando el agua está en movimiento, mediante el ángulo θ que la barra del péndulo hace con la vertical. Considere las siguientes fuerzas actuando sobre el centro de masa de la esfera, como si fuese una partícula puntual: fuerza de gravedad, de la Tierra sobre la esfera; fuerza de empuje, del agua sobre la esfera y; fuerza de roce viscoso en régimen laminar debido al movimiento del fluido, del tipo $\vec{F}_r = -c\vec{v}_{rel}$, donde c es el coeficiente de roce viscoso y $\vec{v}_{rel}$ es la velocidad relativa entre la esfera y el agua, con un movimiento solo en la dirección tangencial.



a) Determine la ecuación de movimiento de la esfera para la variable angular θ cuando el agua tiene una velocidad horizontal $\vec{v}_a = v_h\hat{x}$.

b) Encuentre la posición de equilibrio del péndulo. Analice los casos $\rho_m \approxeq \rho_a$ y $\rho_m \lesseqgtr \rho_a$.

c) Estudie el movimiento alrededor de la posición de equilibrio θ_c y determine la condición para que sea oscilatorio. Considere el régimen de pequeñas oscilaciones $\theta \sim \theta_c$ tal que $\sin\theta \approx \sin\theta_c + \cos\theta_c(\theta - \theta_c)$ y $\cos\theta \approx \cos\theta_c - \sin\theta_c(\theta - \theta_c)$.

d) Responda nuevamente las preguntas anteriores pero ahora considerando solamente una velocidad vertical $\vec{v} = v_v\hat{y}$.