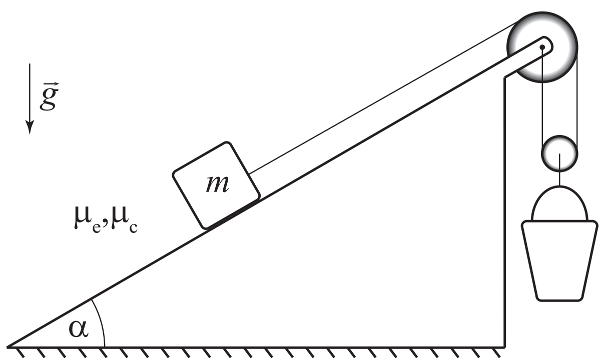
FI1000 - Introducción a la Física Clásica, Otoño 2023

Profesores: I. Bordeu, F. Lund, M.A. Winkler, W. Max-Moerbeck, V. González, C. Arenas, J. Mella, M. Muñoz, C. Falcón, R. Soto.

PAUTA

Control 2

P1. Un bloque de masa m se encuentra en reposo, apoyado sobre un plano inclinado que está fijo al suelo. Entre el bloque y el plano inclinado hay roce, con coeficientes estático μ_e y cinético (dinámico) μ_c. El bloque está unido a un balde de masa despreciable por medio de una cuerda ideal, que pasa por una polea fija y una móvil, ambas ideales, como se muestra en la figura:



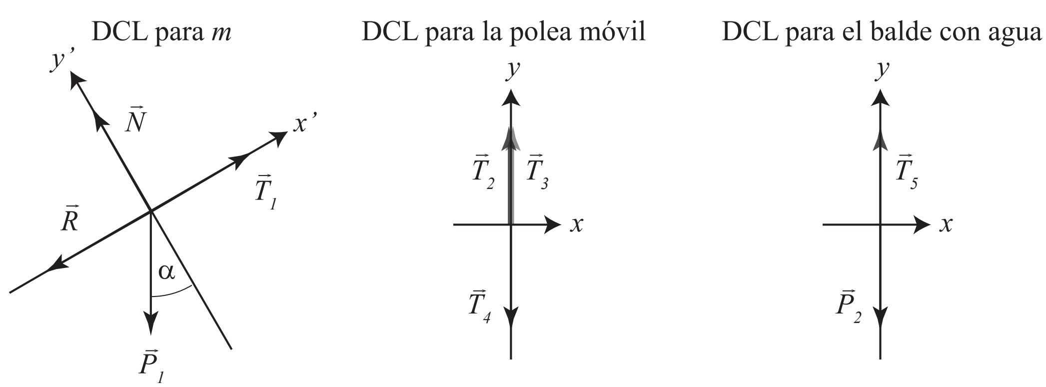
Una persona comienza a verter agua lentamente en la cubeta, y se detiene en el momento en que el bloque comienza a deslizar. Encuentre:

(a) (3 puntos) La masa total del agua vertida en el balde.

(b) (3 puntos) La aceleración del bloque (considerando la masa de agua encontrada en la parte anterior).

SOLUCIÓN P1.

(a) Asumiendo una masa de agua m_2, por determinar, los DCL quedan



Aplicamos la condición de cuerdas ideales: $T_1 = T_2 = T_3 = T$ y $T_4 = T_5 = T'$. Escribimos la segunda ley de Newton para cada cuerpo en el instante en que la masa comienza a deslizar, es decir, cuando $R = \mu_e N$.

Para el bloque (m):

$$x' : \quad T - mg\sin(\alpha) - \mu_e N = 0 \tag{1}$$
$$y' : \quad N - mg\cos(\alpha) = 0, \tag{2}$$

Para la polea:

$$y : 2T - T' = 0, \tag{3}$$

Para el balde con agua (M):

$$y : \quad T' - Mg = 0, \tag{4}$$

Así obtenemos que la masa de agua vertida sobre la cual la masa comienza a deslizar es

$$M = 2m(\mu_e \cos(\alpha) + \sin(\alpha)) \tag{5}$$

(b) Considerando la masa de agua M, Eq. (5), podemos encontrar la aceleración del bloque considerando una fuerza de roce cinética $\mu_c N$, de forma que

$$x' : \quad T - mg\sin(\alpha) - \mu_c N = ma_m \tag{6}$$
$$y' : \quad N - mg\cos(\alpha) = 0, \tag{7}$$

Para el balde con agua (M):

$$y : \quad 2T - Mg = -Ma_M, \tag{8}$$

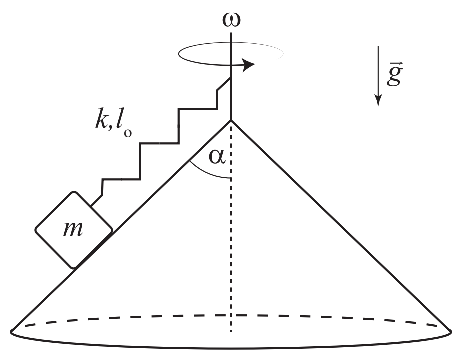
Además, por estar conectadas a través de una polea móvil $a_m = 2a_M$. Luego

$$a_m = \frac{1}{m}\left(T - mg\sin(\alpha) - \mu_e mg\cos(\alpha)\right) \tag{9}$$
$$T = \frac{M}{2}\left(g - \frac{a_m}{2}\right) \tag{10}$$

Usando el la masa M encontrada en (a), Eq. (5), obtenemos

$$a_m = \frac{2g\cos(\alpha)(\mu_e - \mu_c)}{2 + \mu_e\cos(\alpha) + \sin(\alpha)} \tag{11}$$

P2. Considere un bloque de masa m apoyado sobre la superficie de un cono sin roce. La masa se une al eje del cono por medio de un resorte, cuya constante elástica es k y largo natural l_0. El eje del cono está motorizado, de forma que la masa se puede hacer girar con rapidez angular ω constante sobre el cono, como se muestra en la figura:



(a) (2 puntos) Determine la deformación del resorte, para el caso en que $\omega = 0$.

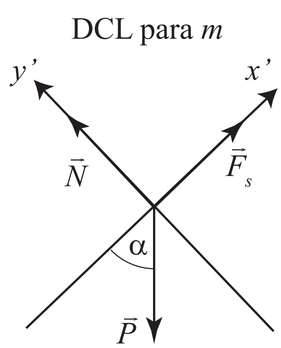
Para una cierta rapidez angular ($\omega > 0$) el bloque puede perder contacto con el cono. Determine:

(b) (2 puntos) La deformación del resorte cuando el bloque pierde contacto con el cono.

(c) (2 puntos) La rapidez angular mínima para la cual el bloque pierde contacto con el cono.

SOLUCIÓN P2.

(a)



Para $\omega = 0$

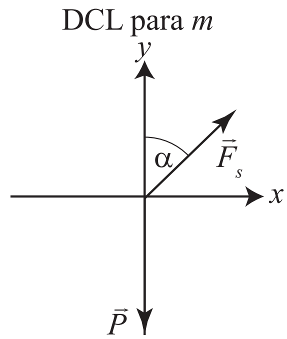
$$\text{x'}: \quad k\Delta l - mg\cos(\alpha) = 0 \tag{12}$$

$$\text{y'}: \quad N - mg\sin(\alpha) = 0, \tag{13}$$

Luego,

$$\Delta l = \frac{mg\cos(\alpha)}{k} \tag{14}$$

(b) Para $\omega_{\min} > 0$, la masa pierde contacto con la superficie cuando $N = 0$, luego



$$\begin{aligned} \text{x:} \quad & k\Delta l' \sin(\alpha) = m\omega_{\min}^2 r & (15) \\ \text{y:} \quad & k\Delta l' \cos(\alpha) - mg = 0, & (16) \end{aligned}$$

con $r = (l_0 + \Delta l')\sin(\alpha)$.

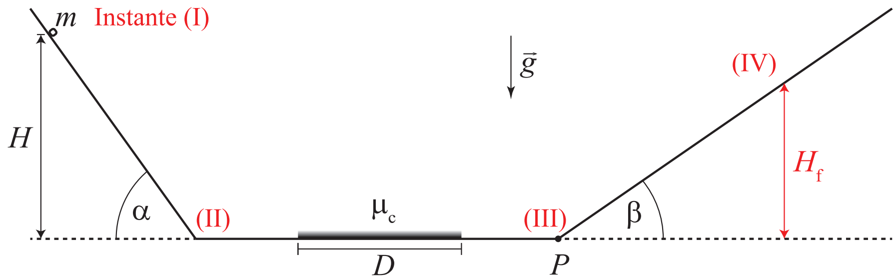
Luego,

$$\Delta l' = \frac{mg}{k\cos(\alpha)} \tag{17}$$

(c) Usando el resultado anterior, encontramos

$$\omega_{\min} = \sqrt{\left(\frac{kg}{kl_0\cos(\alpha) + mg}\right)} \tag{18}$$

P3. Una partícula de masa m se puede mover por los planos inclinados y horizontal que se muestran en la siguiente figura:



Los planos inclinados forman ángulos α y β con la horizontal y no tienen roce, mientras que en la región horizontal hay una zona de largo D, donde la superficie tiene roce con coeficiente de roce cinético (dinámico) μ_c. Inicialmente, la partícula se suelta del reposo a una altura H.

(a) (2 puntos) Calcule el valor mínimo de H que permite que la partícula atraviese toda la región con roce.

(b) (2 puntos) Si H es mayor que el valor mínimo encontrado en la parte anterior, calcule la velocidad con que la partícula llega al punto P.

(c) (2 puntos) Finalmente, ¿a qué altura máxima llega la partícula en el segundo plano inclinado?

SOLUCIÓN P3.

(a) Al llegar al plano horizontal [instante (II) en el esquema], la masa tiene una rapidez

$$v_{\text{II}} = \sqrt{2gH} \tag{19}$$

Por teorema del trabajo y la energía la el cambio de energía cinética debido al trabajo realizado por la fuerza de roce en la supericie de largo D es

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_{\text{III}}^2 - \frac{1}{2}mv_{\text{II}}^2 = -\mu_c mgD. \tag{20}$$

Donde v_{III} es la rapidez de la masa al salir de la superficie con roce [instante (III)]. Luego, la altura mínima, H_{min}, para que la partícula recorra toda la superficie con roce se encuentra imponiendo que $v_{\text{III}} = 0$, es decir

$$mgH_{\text{min}} = \mu_c mgD \tag{21}$$

Luego, $H_{\text{min}} = \mu_c D$.

Nota: (a) Se puede resolver de manera más corta comparando diréctamente los instantes (I) y (III).

(b) Si $H > H_{\text{min}}$, entonces $v_{\text{III}} > 0$:

$$\frac{1}{2}mv_{\text{III}}^2 - \frac{1}{2}mv_{\text{II}}^2 = -\mu_c mgD \tag{22}$$

Luego,

$$\frac{1}{2}mv_{\mathrm{III}}^2 = mgH - \mu_c mgD \tag{23}$$

La rapidez de salida de la zona con roce (igual a la rapidez en P), es

$$v_{\mathrm{III}} = \sqrt{2(gH - \mu_c gD)}, \tag{24}$$

recordando que $H > H_{\min} = \mu_c D$.

(c) La altura alcanzada en el segundo plano [H_{f}, instante (IV)] se obtiene por conservación de energía, por ejemplo, entre los instantes (iv) y (iii):

$$mgH_{\mathrm{f}} = mgH - \mu_c mgD \tag{25}$$

De forma que

$$H_{\mathrm{f}} = H - \mu_c D. \tag{26}$$