

FI1000-1 Introducción a la Física Clásica

Profesor: Ignacio Bordeu

Auxiliares: Alejandro Cartes & Simón Yáñez

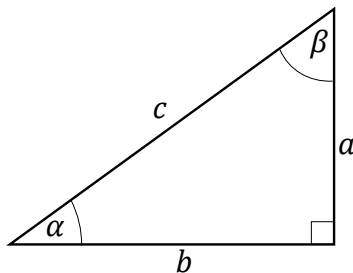
Ayudante: Javier Cubillos



Resumen: Trigonometría

1. Definiciones trigonométricas

Para un triángulo rectángulo se definen las siguientes relaciones entre ángulo y lados:



$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{cat. opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{cat. adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{cat. opuesto}}{\text{cat. adyacente}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{c}{a}$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{c}{b}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{b}{a}$$

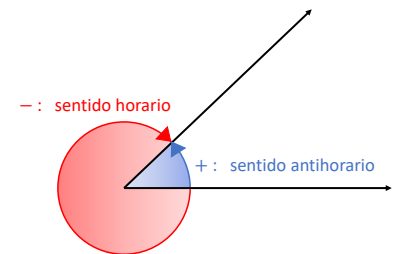
2. Ángulos y Radianes

Se denomina ángulo a la sección del plano que queda comprendida entre dos semirrectas que se originan en un mismo punto, y están colocadas en distintas direcciones.

Se define que un ángulo es **positivo** cuando se mide en el sentido **anti-horario** (contrario a las agujas del reloj), y por lo tanto es **negativo** si se mide en sentido contrario, es decir, en el sentido **horario** (mismo que las agujas del reloj).

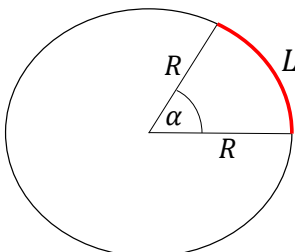
Existen distintos sistemas de medición de ángulos (de manera análoga a la que existen distintos sistemas para medir, por ejemplo, distancias: millas, kilómetros, leguas, etc.). El sistema más conocido es el **sistema sexagesimal** el cual mide los ángulos en **grados, minutos y segundos** ($1^\circ \equiv 60'$ y $1' \equiv 60''$), donde una vuelta a la circunferencia corresponde a 360° .

De ahora en adelante nos centraremos en el **sistema circular** el cual mide los ángulos en **radianes**, donde una vuelta a la circunferencia corresponde a $2\pi[\text{rad}]$ o simplemente 2π .



¿Qué es un radián?

Para definir un radián, primero consideremos una longitud de arco L . Con una simple regla de tres, se tiene que:



$$2\pi[\text{rad}] \longrightarrow 2\pi R \text{ (Perímetro circunferencia)}$$

$$\alpha \longrightarrow L$$

$$\therefore L = \alpha R$$

Esto quiere decir que $1[\text{rad}]$ se define como el ángulo para el cual la longitud de arco L es igual al radio R de la circunferencia.

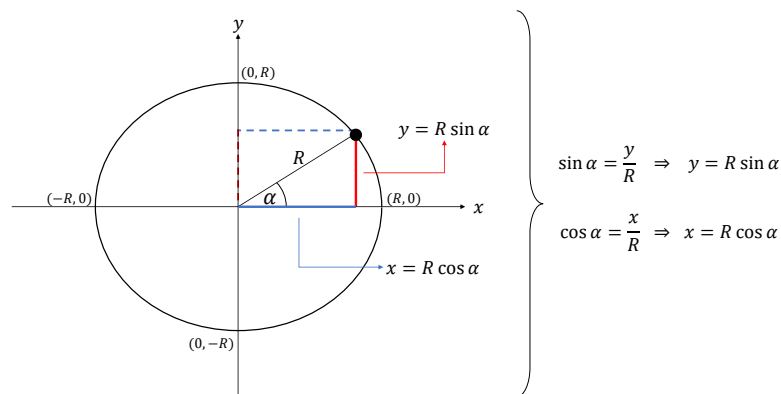
Para pasar de grados a radianes: recordar que $\pi = 180^\circ$ y realizar una regla de 3:

$^\circ$	0	30	45	60	90	180	270	360
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

De esta manera se determina que $1[rad] = 180/\pi \approx 57.296^\circ$

3. Trigonometría en una Circunferencia

Consideremos una circunferencia de radio R centrada en el origen y un punto cualquiera de esta. Las funciones trigonométricas nos permitirá determinar la **proyección** del punto en los ejes. Por las definiciones dadas se tiene que:



Con esto en mente podemos deducir algunas propiedades muy importantes:

- Por teorema de Pitágoras se tiene que:

$$(R \sin \alpha)^2 + (R \cos \alpha)^2 = R^2 \Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

- Algunos valores:

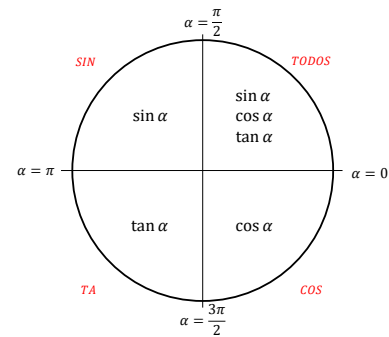
- si $\alpha = 0$:
 - la proyección en x es máxima y vale R , luego $R \cos(0) = R \Rightarrow \cos(0) = 1$
 - la proyección en y es nula, luego $R \sin(0) = 0 \Rightarrow \sin(0) = 0$
- si $\alpha = \pi/2$:
 - la proyección en x es nula, luego $R \cos(\pi/2) = 0 \Rightarrow \cos(\pi/2) = 0$
 - la proyección en y es máxima y vale R , luego $R \sin(\pi/2) = R \Rightarrow \sin(\pi/2) = 1$
- si $\alpha = \pi$:
 - la proyección en x es mínima y vale $-R$, luego $R \cos(\pi) = -R \Rightarrow \cos(\pi) = -1$
 - la proyección en y es nula, luego $R \sin(\pi) = 0 \Rightarrow \sin(\pi) = 0$
- si $\alpha = 3\pi/2$:
 - la proyección en x es nula, luego $R \cos(3\pi/2) = 0 \Rightarrow \cos(3\pi/2) = 0$
 - la proyección en y es mínima y vale $-R$, luego $R \sin(3\pi/2) = -R \Rightarrow \sin(3\pi/2) = -1$
- si $\alpha = 2\pi$: lo mismo que con $\alpha = 0$, pues dimos la vuelta

Esto nos quiere decir que $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ y $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ para cualquier valor de α .

■ Signos:

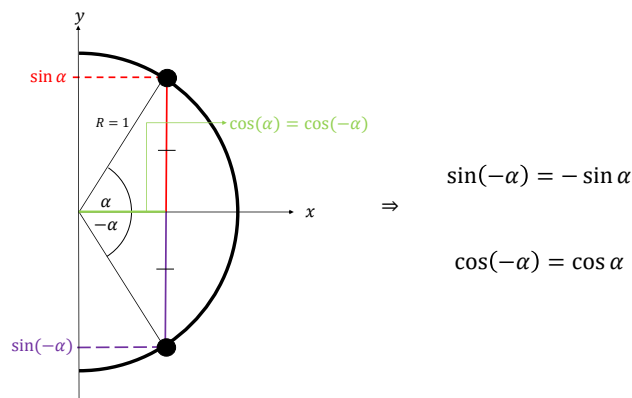
- si $\alpha \in (0, \pi/2)$: $\cos \alpha > 0$ $\sin \alpha > 0$ $\tan \alpha > 0$
- si $\alpha \in (\pi/2, \pi)$: $\cos \alpha < 0$ $\sin \alpha > 0$ $\tan \alpha < 0$
- si $\alpha \in (\pi, 3\pi/2)$: $\cos \alpha < 0$ $\sin \alpha < 0$ $\tan \alpha > 0$
- si $\alpha \in (3\pi/2, 2\pi)$: $\cos \alpha > 0$ $\sin \alpha < 0$ $\tan \alpha < 0$

Ayudamemoria: las regiones en donde estas funciones son positivas pueden ser recordadas por la frase “Todos sin ta-cos”



■ Ángulos negativos:

Es fácil observar que un ángulo negativo genera la misma proyección en el eje x , no así en el eje y , en donde la proyección se vuelve negativa. Es decir:



Una función que cumpla $f(-x) = f(x)$ (como el coseno) se denomina **función par**, por otro lado, si cumple $f(-x) = -f(x)$ (como el seno) se denomina **función impar**

4. Otras identidades importantes

Las siguientes identidades serán de mucha utilidad y verán sus demostraciones en profundidad en Introducción al Cálculo

■ Suma de ángulos:

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
- La resta es aplicar paridad/imparidad de las funciones

■ Teorema del Seno y del Coseno: Para cualquier triángulo se cumplen las siguientes relaciones

- Teorema del Seno: $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$

- Teorema del Coseno:

viene a ser una extensión del Teorema de Pitágoras

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

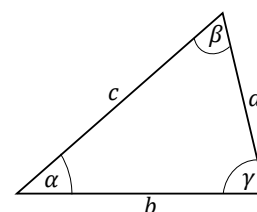


Tabla de valores de ángulos “importantes”

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$

- Ayudamemoria: notar que para el seno y el coseno la tabla se arma de la siguiente manera
 - para el seno se completa con 0, 1, 2, 3, 4 y para el coseno con 4, 3, 2, 1, 0
 - tomar raíz
 - dividir por 2