

Auxiliar 9 - Árboles balanceados

Profesores: Iván Sipiran
Nelson Baloian
Patricio Poblete

Auxiliares: Alonso Almendras, Albani Olivieri
Vicente Olivares, Ricardo Valdivia
Sebastián Acuña, Martín Paredes

P1. Árboles α -balanceados

Un árbol de búsqueda binaria es α -balanceado si para todo nodo interno cuyos hijos son los subárboles I y D , se tiene que

$$\alpha \leq \frac{\omega(I)}{\omega(I) + \omega(D)} \leq 1 - \alpha$$

donde α es un parámetro ($0 < \alpha < 1/3$) y $\omega(T)$ es el número de nodos externos de un árbol T . Demuestre que la altura de un árbol T α -balanceado es $O(\log n)$.

P2. Inserción y eliminación en árboles AVL y 2-3

Considere las siguientes secuencias de inserciones y eliminaciones, donde un + significa una inserción y un - una eliminación.

- (a) +1 +2 +3 +4
- (b) +1 +2 +3 -2 +4 +5 -1 +6
- (c) +1 +3 +2 +6 +5 +4 -1 -2
- (d) +25 +10 +32 +27 +74 +48
- (e) +25 +10 +32 +27 +74 -27

Muestre, en un diagrama, el estado del árbol luego de cada operación para un árbol 2-3 y para un árbol AVL.

P3. Árbol Rojo-Negro

Un árbol Rojo-Negro es un tipo de árbol de búsqueda binaria auto-balanceante. Esto quiere decir que intenta a toda costa mantener mínima su altura y evitar 'ramas' muy largas. Cumple las siguientes propiedades:

- (a) La raíz es negra.
- (b) Todo nodo rojo debe tener dos nodos hijos negros.
- (c) Cada camino desde un nodo dado a sus hojas descendientes contiene el mismo número de nodos negros.
- (d) Cada nodo se inserta de la misma forma que en un árbol binario de búsqueda y es de color rojo.

- **Caso 1:** *El nodo insertado es la raíz.*

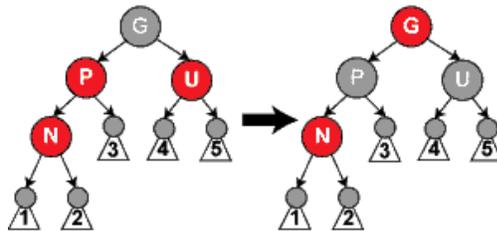
La raíz se pinta de negro.

- **Caso 2:** *El padre del nodo insertado es negro.*

Se deja igual.

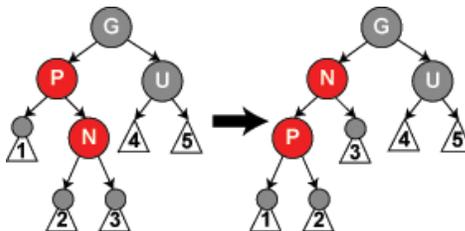
- **Caso 3:** *El padre del nodo y el tío son rojos.*

Se cambia de color al padre y tío, y se revisa al abuelo como si se hubiese insertado.



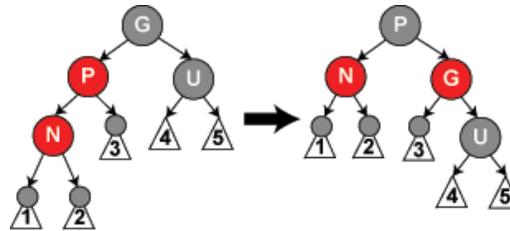
- **Caso 4:** *El padre es rojo pero el tío es negro. El nodo insertado está hacia adentro.*

Se hace una rotación simple sobre el padre para poder pasar al caso 5.



- **Caso 5:** *El padre es rojo pero el tío es negro. El nodo insertado está hacia afuera.*

Se hace una rotación simple sobre el abuelo, y se hacen cambios de color.



Dibuje paso a paso el árbol Rojo-Negro resultante luego de insertar cada uno los siguientes elementos: $\{2, 1, 4, 5, 9, 3, 6, 7\}$, indique además todos los estados intermedios.

BONUS-TRACK Implemente el árbol rojo-negro en *Python*