MA1102-2: Álgebra Lineal
Profesor: Alexander Frank
Auxiliares: Nicolás Toro

Formulario Geometría

- **Proyección de un punto a una recta**: Consideremos un punto $Q \in \mathbb{R}^3$ y una recta:

$$L: \ P_L + \lambda d, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Si denotamos por P^* a la proyección de Q sobre L, entonces:

$$P^* = P_L + \langle Q - P_L, \hat{d} \rangle \hat{d}$$

donde $\hat{d} = \frac{d}{\|d\|}$

- **Proyección de un punto a un plano**: Consideremos un punto $Q \in \mathbb{R}^3$ y un plano:

$$\Pi: \ \langle X - P_\Pi, n \rangle = 0$$

Si denotamos por P^* a la proyección de Q sobre Π, entonces:

$$P^* = Q + \langle P_\Pi - Q, \hat{n} \rangle \hat{n}$$

donde $\hat{n}$ es el vector normal unitario (norma 1).

Ojo que las formulas no sirven si uno no las entiende, por lo tanto, analicémoslas geométricamente usando como ejemplo la Pregunta 1 del Auxiliar 5.

1) **Proyección de un punto a una recta:** En el item (c), se presenta la siguiente situacion: encontrar la proyección ortogonal de $P_0 = (-2, 3, 1)$ sobre la recta $L: \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Gráficamente, tenemos lo siguiente:

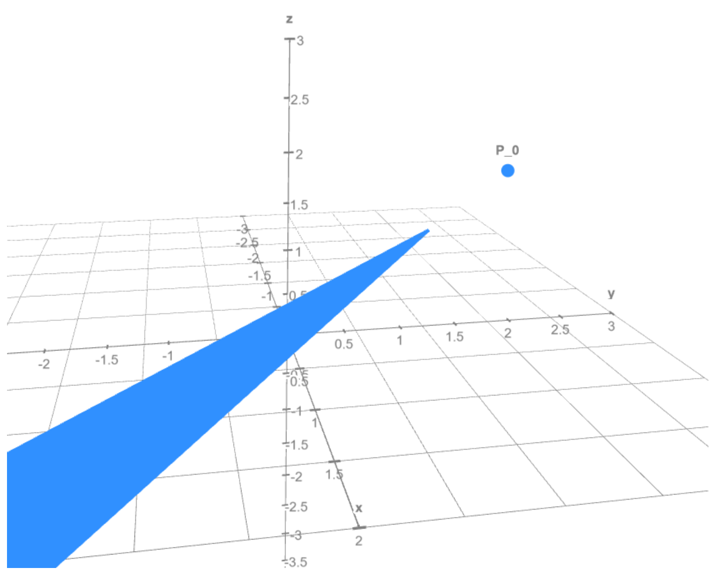

Figura 1: Objetivo: proyectar P_0 sobre L

Para esto:

(i) Consideraremos cualquier punto sobre la recta L, por ejemplo, el vector posición $P_L = (2, 0, 2)$ (es el mas sencillo dado la ecuación vectorial de L). De esta manera, obtenemos:

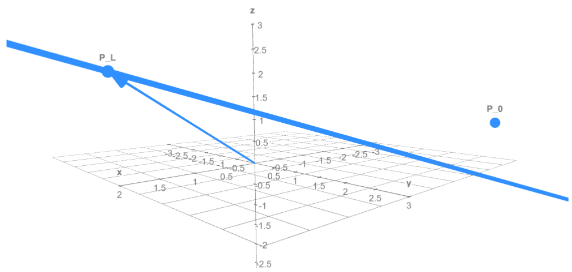

Figura 2: Vector posición P_L

(ii) Desde esta posición P_L nos vamos a dirigir, en la dirección $d = (-2, 1, -1)$, hacia la proyección P^*. Notamos que para caer justo en P^* al movernos a traves de la recta, debemos proyectar el vector que va desde P_L hasta P_0 (matemáticamente sera el vector $P_0 - P_L$) sobre la recta (proyectar sobre d). Gráficamente es lo siguiente:

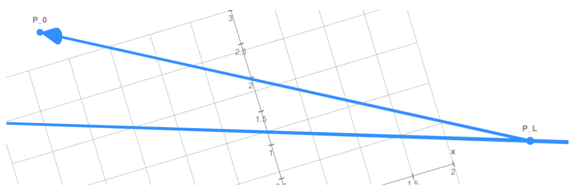

Figura 3: Vector $P_0 - P_L$ listo para proyectar sobre la recta L

De esta manera, la formula queda como se menciono al principio. Claramente los vectores dirección deben estar normalizados, de otra manera distorsionaran la distancia y no caeremos en P^*.