

b) Estudia la convergencia absoluta y condicional de la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sqrt{\frac{k}{k^2 + 1}}$$

c) Utilizando comparaciones apropiadas estudie la convergencia

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \ln(n)}$$

d) Utilizando comparaciones apropiadas estudie la convergencia

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1 + (n)^2}$$

e) Estudie la convergencia

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^n 2k + 1}{(2n - 1)3^n n!}$$

f) Sea f una función de clase $\mathcal{C}^2$ en $[0, 1]$, donde verifica que la imagen nula es nula. Demuestre

$$\int_0^1 f(x) x^{\frac{-3}{2}}$$

Converge

Recuerdo:

- Una sucesión (x_n) se dirá de Cauchy si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N, |x_n - x_m| < \varepsilon$$

- Una sucesión es convergente si y sólo si es de Cauchy.
- Sea (a_n) una sucesión. Luego $\sum a_k$ converge si y sólo si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N, m > n \implies \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \varepsilon$$

- Si $\sum a_k$ converge, entonces $a_n \rightarrow 0$.
- Sean $\sum a_k$ y $\sum b_k$ dos series convergentes y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces la siguiente suma converge:

$$\sum (a_k + \lambda b_k) = \sum a_k + \lambda \sum b_k$$

- Una serie de términos no negativos converge si y sólo si las sumas parciales son acotadas superiormente.
- **Comparación:** Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones no negativas de manera que existe n_0 y $\alpha > 0$ tales que, para todo $n \geq n_0$, $a_n \leq \alpha b_n$. Se tiene que si $\sum b_k < \infty$, entonces $\sum a_k < \infty$.
- **Comparación por Cuociente:** Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones positivas tales que $c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ existe.
 - a) Si $c = 0$ y $\sum b_k$ converge, entonces $\sum a_k$ converge.
 - b) Si $c > 0$, $\sum b_k$ converge si y sólo si $\sum a_k$ converge.
- **Criterio del Cuociente:** Sea (a_n) una sucesión tal que $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ existe.
 - a) Si $r < 1$ entonces $\sum a_k$ converge.
 - b) Si $r > 1$ entonces $\sum a_k$ diverge.
 - c) Si $r = 1$ no se sabe.

- **Criterio de la Raíz:** Sea (a_n) una sucesión de términos no negativos tal

- a) Si $r < 1$ entonces $\sum a_k$ converge.
- b) Si $r > 1$ entonces $\sum a_k$ diverge.
- c) Si $r = 1$ no se sabe.

Obs: En este criterio se puede reemplazar r por $r = \limsup_n a_n = \limsup_n \{a_k : k \geq n\}$

- **Criterio de la Integral:** Sea $k \in \mathbb{N}$ y $f : [k, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ una función decreciente. Se tiene que $\sum_{n \geq k} f(n)$ converge si y sólo si $\int_k^\infty f(x) dx$ converge.
- Sea (a_k) una sucesión. Diremos que $\sum a_k$ es absolutamente convergente si $\sum |a_k|$ converge.
- Toda serie absolutamente convergente es convergente. Además una serie es absolutamente convergente si y sólo si la serie de sus términos negativos y la de sus términos positivos convergen.
- Si una serie converge, pero no converge absolutamente se le dirá condicionalmente convergente.
- **Criterio de Leibnitz:** Sea (a_n) una sucesión decreciente tal que $a_n \rightarrow 0$. Entonces $\sum (-1)^n a_n$ es convergente.
- Sea (a_k) una sucesión. Si $\sum |a_k|$ converge, luego cualquier reenumeración (b_k) verifica que $\sum b_k = \sum a_k$ converge.
- Sea (a_k) tal que $\sum a_k$ es condicionalmente convergente. Luego para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ existe una reenumeración b_n tal que $\sum b_k = \alpha$.
- Sean $\sum a_k$ y $\sum b_k$ dos series absolutamente convergentes, entonces su producto es $\sum c_k$, donde (c_k) es cualquier sucesión que contiene exactamente una vez cada producto posible. En particular podemos tomar $c_k = \sum_{l=0}^k a_l b_{k-l}$.

Recuerdo:

- **[Series de Potencias]:** Una serie de potencias es una serie de la forma: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - \alpha)^k$, para este curso estudiaremos el caso de $\alpha = 0$.

- **[Radio de convergencia]:** Se define el radio de convergencia R como

$$R = \sup\{x_0 : \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k < \infty\}$$

- **[Intervalo de convergencia]:** Se llama intervalo de convergencia al intervalo I tal que $\forall x \in I$ la serie de potencias converge, se debe cumplir que $(-R, R) \subseteq I \subseteq [-R, R]$.

Por lo que para calcular el intervalo de convergencia I se necesita encontrar R , con esto garantizamos que I a lo menos será el intervalo abierto $(-R, R)$, luego se estudia la frontera, es decir, se estudia si la serie converge para $x = R$ o $x = -R$, en caso de converger en alguno de estos valores, se añadirá al intervalo $(-R, R)$, de esta forma se corrobora que $(-R, R) \subseteq I \subseteq [-R, R]$.

- Para calcular el radio de convergencia de una serie de potencias de la forma $\sum_{k \geq n_0} a_n x^n$ existe

las siguientes tres formas (todas entregarán el mismo valor si existe), cual usar dependerá del ejercicio.

$$\begin{aligned} 1) \quad L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \\ 2) \quad L &= \lim_{n \rightarrow \infty} (|a_n|)^{\frac{1}{n}} \\ 3) \quad L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} (|a_k|)^{\frac{1}{k}} \end{aligned}$$

En caso de existir L se tiene que el radio de convergencia es: $R = \frac{1}{L}$

- Dada una serie de potencias $\sum a_k x^k$ con intervalo de convergencia I , definimos:

$$f(x) = \sum a_k x^k$$

Esta función es continua, derivable e integrable. Más aún las integrales y derivadas son término a término, esto es que la derivada o la integral la pueden “pasar” para dentro de la serie

- Dadas dos series de potencias $\sum a_k x^k$ y $\sum b_k x^k$ convergentes para x_0 . Entonces la serie $\sum (a_k + b_k) x^k$ converge para todo $x \in (-|x_0|, |x_0|)$ y se tiene que $\sum (a_k + b_k) x^k = \sum a_k x^k + \sum b_k x^k$. Además si $c_k \sum_{j=1}^k a_j b_{k-j}$, la serie $\sum c_k x^k$ converge para todo $x \in (-|x_0|, |x_0|)$ y se tiene que $\sum c_k x^k = (\sum a_k x^k)(\sum b_k x^k)$.

- Aprenderse $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ para $|x| < 1$ y sus variantes y traslaciones como:

$$\begin{aligned} \bullet \quad f(-x) &= \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \text{ para } |x| < 1 \\ \bullet \quad f(x-1) &= \frac{1}{1-(x-1)} = \frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n \\ &\text{para } |x-1| < 1 \end{aligned}$$

Y ocupar derivadas e integrales para calcular otras funciones (por ejemplo logaritmos).

“Siempre fuertes a luchar, el trabajo tesonero todo lo vence”

La verdad fue todo un gusto y honor haberles hecho clases auxiliares, se despide la dupla Javier y Patricio, opuestos complementarios en la matraca, nos vemos en la Uni!!

Serie Numérica

$$\sum_{n=i}^{\infty} a_n := \lim_{N \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{n=i}^N a_n}_{\text{sumatoria}}$$

• Si $\sum a_n < \infty \Rightarrow a_n \rightarrow 0$ (Condición Necesaria de convergencia)

• Si $\sum a_n, \sum b_n < \infty$

$$\Rightarrow \sum (a_n + \lambda b_n) < \infty$$

$$\text{y } \sum (a_n + \lambda b_n) = \sum a_n + \lambda \sum b_n$$

(Separación Serie)

Criterios de convergencia:

- 1) Comparación
- 2) Comparación por cociente
- 3) Cociente
- 4) Raíz n-ésima
- 5) Integral Impropi
- 6) Leibniz

P1

a) Criterio Integral Impropio

Determine los valores de $p \in \mathbb{R}$ para los cuales la siguiente serie numérica converge.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)^p}$$

Sol:

Criterio de la Integral Impropia

Si $f \geq 0$ y decreciente en $[k, \infty)$ ($k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), entonces:

$$\sum_{n \geq k} f(n) < \infty \iff \int_k^{\infty} f(x) dx < \infty$$

Definir $f(x) := \frac{1}{x \ln(x)^p}$.

Notar que $f \geq 0$ y decreciente en $[2, \infty)$. Además:

$$\int_2^{\infty} f(x) dx = \int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln(x)^p} dx = \int_{\ln(2)}^{\infty} \frac{1}{u^p} du \quad (*)$$

$\swarrow$
 $\text{c.v.: } u = \ln(x)$
 $du = \frac{dx}{x}$
 $x=2 \rightarrow u = \ln(2)$
 $x=\infty \rightarrow u = \infty$

Sabemos que $(*) < \infty$ si $p > 1$ (II de 1º examen), luego por criterio de la integral impropia tenemos que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)^p} < \infty \quad \text{si } p > 1.$$

b) Criterio del cociente

Estudie si la siguiente serie converge:

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{n^n}{n!} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Sol:

Criterio del cociente

Si $\Gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \in \mathbb{R}$, entonces:

i) $\Gamma < 1 \Rightarrow \sum a_n < \infty$

ii) $\Gamma > 1 \vee \Gamma = \infty \Rightarrow \sum a_n = \infty$

Notar que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(-1)^{n+1} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}|}{|(-1)^n \frac{n^n}{n!} \left(\frac{1}{3}\right)^n|}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{(n+1)^n} \cancel{(n+1)} \left(\frac{1}{3}\right)^{\cancel{n}} \left(\frac{1}{3}\right)}{\cancel{(n+1)} \cancel{n!} \cancel{\left(\frac{1}{3}\right)^n}}$$

$$\frac{n^n}{n!} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{3} e < \frac{3}{3} = 1$$

$$e = 2,718...$$

Luego por criterio del cociente:

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{n^n}{n!} \left(\frac{1}{3}\right)^n < \infty$$

c) Criterio de comparación por cociente

Estudie la convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n}$$

Sol

Criterio de comparación por cociente

Si $(a_n), (b_n) \geq 0$ tq $c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \in \mathbb{R}$,
entonces: $\downarrow$
 $\forall n \geq n_0$

i) $c = 0$: $\sum b_n < \infty \Rightarrow \sum a_n < \infty$

ii) $c > 0$: $\sum b_n < \infty \Leftrightarrow \sum a_n < \infty$

Recordar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \left(\text{comparar por } L'H\hat{o}pital \right)$$

Luego:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{2} > 0$$

~~~~~

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^3}}$$

Ahora, notar que:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3} < \infty$$

por criterio de la integral impropia, pues  $f(x) = \frac{1}{x^3}$  es  $\geq 0$  y decreciente

en  $[1, \infty)$  y  $\int_1^\infty \frac{1}{x^3} dx < \infty$

(de la forma  $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$  con  $\alpha = 3 > 1$ ).

Entonces, por criterio de comparación por cociente:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n} < \infty \quad \blacksquare$$

4) Criterio de la Raíz  $n$ -ésima:

Estudie la convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+1}{n+2} \right)^{n^2}$$

Sol:

Criterio de la Raíz  $n$ -ésima

Si  $(a_n) \geq 0$  y  $\Gamma = \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{1/n} \in \mathbb{R}$

(el límite más grande posible de una subsecuencia, coincide con el límite cuando este último existe), entonces:

i)  $\Gamma < 1 \Rightarrow \sum a_n < \infty$

ii)  $\Gamma > 1 \vee \Gamma = \infty \Rightarrow \sum a_n = \infty$

Notar que:

$$a_n := \left( \frac{n+1}{n+2} \right)^{n^2} \geq 0. \text{ Además:}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( \frac{n+1}{n+2} \right)^{n^2} \right)^{1/n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n+2} \right)^n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+2-1}{n+2} \right)^n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{(-1)}{n+2} \right)^n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{(-1)}{n+2} \right)^{n+2} \left( 1 + \frac{(-1)}{n+2} \right)^{-2} \xrightarrow{e^{-1}} \xrightarrow{1}$$

$$= \frac{1}{e} < 1$$

Luego por criterio de la raíz  $n$ -ésima:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+1}{n+2} \right)^{n^2} < \infty$$



## Serie de Potencia

Serie de la forma:  $\sum_{n=i}^{\infty} a_n x^n$   
para  $x \in \mathbb{R}$ .

•  $R = \sup \{x : \sum a_n x^n < \infty\}$  (radio de convergencia)

$$\downarrow \left( \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} \right)^{-1} = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right)^{-1} \downarrow$$

crisis de la raíz n-ésima      crisis del cociente

• Si  $R$  es el radio de convergencia, entonces el intervalo de convergencia  $I$  cumple que  $(-R, R) \subseteq I \subseteq [-R, R]$ , donde  $\forall x \in I, \sum a_n x^n < \infty$

(ojo, esto dice que cualquier  $x \in \mathbb{R}$  tq  $|x| < R$  da una serie convergente, y no hay que comprobar que sucede cuando  $|x| = R$ ).

• Se define para  $x \in I$ :

$$F(x) = \sum_{n=i}^{\infty} a_n x^n$$

$F$  es continua, infinitamente diferenciable e integrable. Más aún, las integrales y derivadas son término a término ("entran" a la serie).

•  $F(x) = \sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$  para  $|x| < 1$ .

$$\begin{aligned}
 c) f(x) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{(n+1)(n+2)} x^{n+2} \\
 &= \sum_{n \geq 2} \underbrace{\frac{1}{n(n-1)}}_{a_n} x^n
 \end{aligned}$$

1) Calcule el radio de convergencia y entregue el intervalo de convergencia, estudiando qué ocurre en los extremos.

Sol. Radio de convergencia:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(n+1)} \cdot n(n-1)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$$

$$\Rightarrow R = 1.$$

Aun, el intervalo de convergencia  $I$  incluye a  $(-R, R) = (-1, 1)$ .

Para ver qué pasa en  $x=1$ , estudiamos el criterio de comparación:

Criterio de comparación

Si  $(a_n), (b_n) \geq 0$  y  $\exists m_0 \in \mathbb{N}, \exists \alpha > 0$  t.q.  $a_n \leq \alpha b_n, \forall n \geq m_0$ , entonces:

$$\sum b_n < \infty \Rightarrow \sum a_n < \infty$$

Si  $x=1$ , la serie queda:

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$$

Notar que:

$$a_n := \frac{1}{n(n-1)}, b_n := \frac{1}{(n-1)^2} \geq 0$$

$$\text{y } a_n = \frac{1}{n(n-1)} \leq \frac{1}{(n-1)(n-1)} = \frac{1}{(n-1)^2} = b_n$$

Luego, como  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(n-1)^2} < \infty$  (por

criterio de la integral impropia, pues  $f(x) := \frac{1}{(x-1)^2} \geq 0$ , es decreciente y

$$\left( \int_2^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{u^2} du < \infty \right. \\ \left. \begin{array}{l} \text{c.v.: } u=x-1 \\ du=dx \\ x=2 \rightarrow u=1 \\ x \rightarrow \infty \rightarrow u \rightarrow \infty \end{array} \right) \left( \int_1^{\infty} \frac{1}{u^2} du < \infty, \forall \alpha > 1 \right)$$

Entonces por criterio de comparación:

$$F(1) = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)} < \infty$$

Ahora, para ver qué pasa en  $x=-1$ , estudiamos el criterio de Leibniz:

Criterio de Leibniz:

Si  $(a_n) \geq 0$  y  $a_n \rightarrow 0$  entonces  $\sum (-1)^n a_n < \infty$ .

Notar que la serie queda:

$$\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$$

Aquí,  $a_n := \frac{1}{n(n-1)} \geq 0$  y

converge a 0, luego por criterio de Leibniz se tiene que:

$$F(-1) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)} < \infty$$

$\therefore I = [-1, 1]$  es el intervalo de convergencia. ■

2) Calcule  $f'(x)$ ,  $f''(x)$ ,  $f'(0)$ ,  $f(0)$ .

Sol  $f(x) = \sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n(n-1)}$ ,  $f(0) = 0$ .

$$\Rightarrow f'(x) = \sum_{n \geq 2} \frac{\cancel{n} x^{n-1}}{\cancel{n}(n-1)} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} x^n$$

$$\Rightarrow f'(0) = 0$$

$$\Rightarrow f''(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} x^{n-1} = \sum_{n \geq 0} x^n$$

3) Identifique  $f''(x)$  como una serie geométrica e integre para encontrar explícitamente la función  $f$ .

Sol:  $f''(x) = \sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$   
↙  
si  $|x| < 1$   
(serie geométrica)

$$\Rightarrow \int dx \quad f'(x) = \int \frac{1}{1-x} dx + C \underset{\substack{\text{c.v.} \\ u=1-x \\ du=-dx}}{=} - \int \frac{1}{u} du + C \\ = -\ln(u) + C = -\ln(1-x) + C$$

Però  $0 = f'(0) = -\ln|1-0| + C = C$

$$\Rightarrow_{(C=0)} f'(x) = -\ln(1-x)$$

$$\Rightarrow \int dx \quad f(x) = - \int \ln(1-x) dx + \tilde{C}$$
$$\underset{\substack{\text{c.v.} \\ u=1-x \\ du=-dx}}{=} \int \ln(u) du + \tilde{C}$$

$$= u \ln(u) - u + \tilde{C}$$

↙  
primitiva  
de  $\ln$   
(per parts)

$$= (1-x) \ln(1-x) - (1-x) + \tilde{C}$$

Però  $0 = f(0) = \cancel{(1-0)} \ln \overset{0}{(1-0)} - (1-0) + \tilde{C}$

$$\Rightarrow \tilde{C} = 1$$

Ans:

$$f(x) = x + (1-x) \ln(1-x)$$

4) Calcule el valor de la serie numérica:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}$$

Sol: Sabemos del principio y de iii) que:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \\ &= x + (1-x) \ln(1-x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow_{(-1 \in I)} f(-1) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \\ &= (-1) + (1 - (-1)) \ln(1 - (-1)) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)} = -1 + 2 \ln(2)$$



$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln(\ln(n))}$$

Criterio de la integral  
impropia (134)

Sea  $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$  función decreciente

Se tiene  $\sum_{n \geq 1} f(n) < +\infty$  (finita)  $\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x) dx < +\infty$

Entonces estudiamos

otro c.v  
 $x = e^u \Rightarrow dx = e^u du$   
 $x = 3 \Rightarrow \ln(3) = u$   
 $x = +\infty \Rightarrow u = +\infty$

$$\int_{\ln(3)}^{+\infty} \frac{e^u du}{e^u (\ln(e^u))} //$$

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x (\ln(\ln(x)))}$$

$$\begin{aligned} u &= \ln(x) & du &= \frac{1}{x} dx \\ x=3 &\Rightarrow u = \ln(3) \\ x=+\infty &\Rightarrow u = +\infty \end{aligned}$$

$$= \int_{\ln(3)}^{+\infty} \frac{e^u du}{e^u \ln(u)} = \int_{\ln(3)}^{+\infty} \frac{du}{\ln(u)}$$

→ semana pares que no cacharon  
 (week 11 Ma 1001)  
 184

$$1 - \frac{1}{x} < \ln(x) < x - 1 < x \quad (\text{desigualdad fundamental})$$

(1) (2) (3) (4)

Si: (2) < (4)

$$\frac{1}{(4)} < \frac{1}{(2)} \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{\ln(x)}$$

luego  $\int_{\ln(3)}^{+\infty} \frac{dm}{\ln(m)} > \int_{\ln(3)}^{+\infty} \frac{1}{m} dm$

la más pequeña explota

$\Rightarrow$  la más grande explota!

luego como  $\int_{\ln(3)}^{+\infty} \frac{dm}{\ln(m)}$  diverge  $\Rightarrow \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n \ln(\ln(k))}$  diverge



**fcfm**

Ingeniería Matemática  
FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE



$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sqrt{\frac{k}{k^2+1}}$$

absoluta  
 $\Rightarrow$  condición

Vemos 
$$\sum_{k=0}^{\infty} |(-1)^k \sqrt{\frac{k}{k^2+1}}| = \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\frac{k}{k^2+1}}$$

Sea  $a_k = \sqrt{\frac{k}{k^2+1}}$  y  $b_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \rightarrow$  converge

Vemos cociente 
$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{k}{k^2+1}}}{\frac{1}{\sqrt{k}}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{k^2}{k^2+1}} \rightarrow 1 > 0$$

luego 
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} = +\infty \quad (\text{diverge})$$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{k}{k^2+1}} = +\infty$

$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \sqrt{\frac{k}{k^2+1}}$   
 Es decreciente de la derivada

$$\left( \sqrt{\frac{x}{x^2+1}} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}} \cdot \left( \frac{x^2+1 - 2x^2}{(x^2+1)^2} \right) = \frac{-x^2+1}{2\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}} \cdot \frac{1}{(x^2+1)}$$

Es negativo para  $x \rightarrow +\infty$

Si  $a_n$  decreciente y  $a_n \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n < +\infty$$

Leibnitz Si  $a_n$  sucesión decreciente y convergente a 0  
 (luego  $a_n$  no negativa)  $\Rightarrow \sum (-1)^n a_n$  converge (13a)

además  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{k}{k^2+1}} = 0$  luego por Leibnitz

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \sqrt{\frac{k}{k^2+1}} < +\infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \ln(n)}$$



**fcfm**

Ingeniería Matemática  
FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

$$\ln(n) < n - 1$$

$$\ln(n+1) < n$$

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{\ln(n+1)}$$



luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \ln(n)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad \text{con } p \leq 1$$

diverge

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \ln(n)} \text{ diverge } //$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$$

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} > 0$$

$$b_n = \frac{1}{n^{3/2}} > 0$$

Luego  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = 1$

Luego  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p}$ ,  $p > 1$  converge  
 $p = \frac{3}{2} > 1$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} < +\infty$$



**fcfm**

Ingeniería Matemática  
 FACULTAD DE CIENCIAS  
 FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
 UNIVERSIDAD DE CHILE



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^n (2k+1)}{(2n-1) 3^n n!}$$

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} > 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

$$5: \quad r < 1 \Rightarrow \sum a_n < +\infty$$

$$r > 1 \Rightarrow \sum a_n = +\infty$$

$$r = +\infty$$

$$r = 1 \quad \text{ni ideal}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^n (2k+1)}{(2n-1) 3^n n!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)}{(2n-1) 3^n n!}$$

$$a_n = \frac{\prod_{k=1}^n (2k+1)}{(2n-1) 3^n n!}$$

$$a_{n+1} = \frac{\prod_{k=1}^{n+1} (2k+1)}{(2n+1) 3^{n+1} (n+1)!}$$

Criterio cociente

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left( \prod_{k=1}^n (2k+1) \right) \cdot (2n+3)}{(2n+1) 3^n \cdot 3 \cdot n! \cdot (n+1)} \cdot \frac{(2n-1) 3^n n!}{\left( \prod_{k=1}^n (2k+1) \right)}$$

$$= \frac{4n^2 + 4n - 3}{6n^2 + 9n + 3} \rightarrow \frac{2}{3} < 1$$

$$\text{Luego} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=1}^n (2k+1)}{(2n-1) 3^n n!} < +\infty$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx < \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \arctan(x) \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2} - 0 //$$

$$\Rightarrow \text{por lo tanto } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx \text{ converge}$$

ya que converge,  $\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx < \frac{\pi}{2}$   
por

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^x - e^x dx$$

$$\begin{aligned} u &= e^x \\ du &= e^x dx \\ \frac{du}{u} &= dx \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^x \cdot e^{-e^x} dx$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} u \cdot e^{-u} \cdot \frac{du}{u} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u} du \quad \downarrow \text{pues } e^{-u} \text{ converge} \\ &= -e^{-u} \Big|_{-\infty}^{\infty} = -\cancel{e^{-\infty}}^0 + \cancel{e^{-(-\infty)}}^0 \end{aligned}$$



## MA1002-6 Cálculo Diferencial e Integral

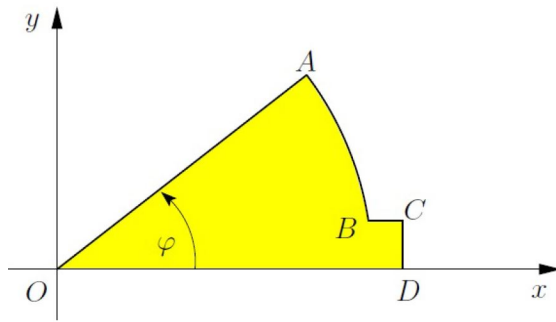
Auxiliares: Vicente Salinas &  
Marcelo Navarro



## Soluciones Guía Control 3

A darlo vuelta

**P1.** Un trompo se genera por la rotación en torno al eje  $OX$  de la curva  $OABCD$  mostrada en la figura



$OA$ : es un trazo recto inclinado en un ángulo  $\varphi$ ,

$AB$ : es un arco de circunferencia de radio  $R$  y centro en  $O$ ,

$BC$ : es un trazo horizontal,

$CD$ : es un trazo vertical de largo 1, ubicado en  $x = R + 1$ .

- Escriba, en términos de  $R$  y  $\varphi$ , las ecuaciones de las funciones que definen los tramos  $OA$ ,  $AB$  y  $BC$  de la curva y encuentre las coordenadas de los puntos  $A, B$  y  $C$ .
- Encuentre el área total de la superficie exterior del trompo.

**Solución:**

- $OA$  está definido por  $y = \tan(\varphi)x$
  - $AB$  está definido por  $x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow y = \sqrt{R^2 - x^2}$
  - $BC$  está definido por  $y = 1$
  - $A = (R\cos(\varphi), R\sin(\varphi))$ ,  $B = (\sqrt{R^2 - 1}, 1)$ ,  $C = (R + 1, 1)$

Por lo que el trompo se modela como:

$$f(x) = \begin{cases} \tan(\varphi)x & \text{si } x \in [0, R\cos(\varphi)] \\ \sqrt{R^2 - x^2} & \text{si } x \in [R\cos(\varphi), \sqrt{R^2 - 1}] \\ 1 & \text{si } x \in [\sqrt{R^2 - 1}, R + 1] \end{cases}$$

- La superficie total,  $S$  es igual a la siguiente expresión

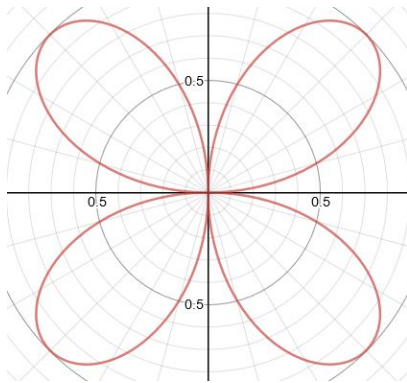
$$S = 2\pi \int_0^{R\cos(\varphi)} (\tan(\varphi)x) \sqrt{1 + ((\tan(\varphi)x)')^2} dx + 2\pi \int_{R\cos(\varphi)}^{\sqrt{R^2 - 1}} \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + ((\sqrt{R^2 - x^2})')^2} dx \\ + 2\pi \int_{\sqrt{R^2 - 1}}^{R+1} 1 \sqrt{1 + (1')^2} dx + \pi \cdot 1^2$$

Donde la  $\pi \cdot 1^2$  representa la tapa circular que se forma al rotar el segment  $CD$

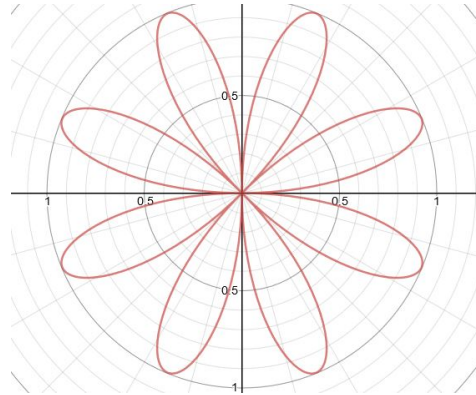
**P2.** Probar que el área encerrada por los  $2n$  lazos de  $r = a \sin(n\theta)$ , con  $n$  par es independiente de  $n$ . ¿Que sucede para el caso de  $n$  impar?

**Solución:**

Notemos que si  $n$  es par, entonces la curva polar  $r = a \sin(n\theta)$  forma  $2n$  pétalos o lazos



(a)  $n = 2$



(b)  $n = 4$

Figura 1: Ejemplos para  $n = 2$  y  $n = 4$

Ahora calculemos el área de un pétalo y luego multiplicamos por los  $2n$  que hay. Para esto basta notar que en  $\theta = 0$  se tiene que  $r = 0$ , y para  $\theta = \frac{\pi}{n}$  se tiene, igualmente, que  $r = 0$  por lo que aquí es cuando se forma un pétalo. Luego

$$A = 2n \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{n}} (a \sin(\theta))^2 d\theta = n \int_0^{\frac{\pi}{n}} a^2 \sin^2(\theta) d\theta = \frac{na^2}{2} \cdot \frac{\pi}{n} = \frac{\pi a^2}{2}$$

Lo cual no depende de  $n$ .

Por otro lado si  $n$  es impar, voy a tener la mitad de pétalos que conseguía cuando  $n$  era par. Entonces

$$A_{\text{impar}} = \frac{A_{\text{par}}}{2}$$

**P3.** Calcular el área de la región fuera del cardioide  $\rho = 2(1 - \cos(\phi))$  y dentro del círculo  $\rho = -6 \cos(\phi)$ .

**Solución:** La pauta esta en el control 2014-3 de Uribe



**P4.** Sea  $a > 0$  considere la región limitada por los ejes y el arco de circunferencia de centro  $(a, a)$  y radio  $a$ .

a) Calcule el área de la región.

**Solución:** Para calcular el área de la región primero es necesario parametrizar el círculo de centro  $(a, a)$  y radio  $a$ :

$(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2 \Rightarrow y = a - \sqrt{a^2 - (x - a)^2}$ , se escoge el valor negativo de la raíz pues nos interesa el semicírculo inferior.

Los límites de  $x$  estarán dados por los valores en los que intercepta a los ejes, los cuales son:  $x = 0$  y  $x = a$ . Por lo tanto el área es:

$$A = \int_0^a y dx = \int_0^a a - \sqrt{a^2 - (x - a)^2} dx, \text{ esta integral entrega como resultado: } a^2 - \frac{\pi a^2}{4}$$

(el cambio conveniente es  $(x - a) = a \sin(u)$ ).

**Observación:** Notar que también se pudo haber calculado el área como la de un cuadrado de largo  $a$  menos la de un cuarto de círculo de radio  $a$ .

b) Calcule el centro de gravedad de la región

**Indicación:** Puede serle útil recordar :  $X_G = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} \wedge Y_G = \frac{\int_a^b \frac{f(x)^2}{2} dx}{\int_a^b f(x) dx}$

**Solución:**

Para calcular las coordenadas del centro de gravedad notamos que faltan:  $\int_a^b \frac{f(x)^2}{2} dx$  y  $\int_a^b x f(x) dx$ .

$$\int_a^b \frac{f(x)^2}{2} dx = \int_0^a \frac{a^2 - 2a\sqrt{a^2 - (x - a)^2} + a^2 - (x - a)^2}{2} dx = a^3 - \frac{\pi a^3}{4} - \frac{a^3}{6} = a^3 \left( \frac{5}{6} - \frac{\pi}{4} \right)$$

Para el caso de la otra integral se tiene que:

$$\int_a^b x f(x) dx = \int_0^a ax - x\sqrt{a^2 - (x - a)^2} dx = \frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{\pi a^3}{4}$$

Por lo tanto al reemplazar:

$$X_G = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} = \frac{\frac{a^3(10 - 3\pi)}{12}}{\frac{a^2(4 - \pi)}{4}} = \frac{a(10 - 3\pi)}{3(4 - \pi)} \wedge Y_G = \frac{\int_a^b \frac{f(x)^2}{2} dx}{\int_a^b f(x) dx} = \frac{\frac{a^3(10 - 3\pi)}{12}}{\frac{a^2(4 - \pi)}{4}} = \frac{a(10 - 3\pi)}{3(4 - \pi)}$$

Así que el centro de gravedad es  $\left( \frac{a(10 - 3\pi)}{3(4 - \pi)}, \frac{a(10 - 3\pi)}{3(4 - \pi)} \right)$

**P5.** Sea  $n \geq 1$  encuentre el centroide de la región entre  $f(x) = x^n$  y la recta  $x = 1$ . Muestre que sucede si  $n \rightarrow \infty$

**Solución:**

Las coordenadas del centro de masa son

$$X_G = \frac{\int_0^1 x \cdot x^n dx}{\int_0^1 x^n dx} = \frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$Y_G = \frac{\int_0^1 \cdot x^2 n dx}{2 \int_0^1 x^n dx} = \frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{2}{n+1}} = \frac{n+1}{4n+2}$$

Cuando  $n \rightarrow \infty$  el centroide converge a  $(1, \frac{1}{4})$

**P6.** Considere las funciones  $f(x) = \sin(x)$  y  $g(x) = \pi x - x^2$  definidas para  $x \in [0, \pi]$ . Se define la región  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \pi], y \in [f(x), g(x)]\}$

- Demuestre que  $\forall x \in [0, \pi], g(x) \geq f(x)$ .
- Calcule el área de la región  $R$ .
- Encuentre la posición del centro de gravedad de la región  $R$ .
- Determine el perímetro de la región  $R$ .

**Solución**

- Para probar que  $g(x) \geq f(x)$ , se define la función auxiliar  $h(x) = g(x) - f(x)$  que es derivable, y aquí se prueba que  $h(x) > 0$  (que es análogo a lo que se quiere probar). Notemos que  $h(0) = h(\pi) = 0$  si probamos mediante crecimientos que  $h$  empieza a crecer desde  $x = 0$  y se mantiene positivo sobre el eje  $x$  ganamos. Para esto veamos su crecimiento.

$$h'(x) = \pi - 2x - \cos(x), \quad x \in [0, \pi]$$

Mediante inspección (cachativa) nos damos cuenta que  $h'(\frac{\pi}{2}) = 0$  y es el único punto crítico ya que  $-2x$  es estrictamente decreciente (por lo que no vuelve a subir ni a pasar por otro punto de altura similar). Luego notamos que  $h''(x) = -2 + \sin(x) < 0$  por lo tanto  $h$  es cóncava, lo que vuelve a  $\frac{\pi}{2}$  es un máximo local. por lo que se cumple que

$h(x)$  es creciente en  $[0, \frac{\pi}{2}]$  y es decreciente en  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$  por lo que necesariamente  $h(x) \geq 0$  lo que equivale a que  $g(x) \geq f(x), x \in [0, \pi]$

- El área de la región es simplemente el área bajo la curva de  $g(x)$  menos el área bajo la curva de  $f(x)$  (esto debido a que  $g(x)$  es más grande).

$$A_R = \int_0^\pi (g(x) - f(x)) dx = \int_0^\pi (\pi x - x^2 - \sin(x)) dx = \left( \frac{\pi x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cos(x) \right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi^3}{6} - 2$$

c) El centro de gravedad de  $R$  se calcula como:

$$X_G = \frac{\int_0^\pi x (g(x) - f(x)) dx}{A_R} \quad Y_G = \frac{\int_0^\pi (g^2(x) - f^2(x)) dx}{A_R}$$

d) El perimetro se calcula como

$$\begin{aligned} P &= \frac{L(g) + L(f)}{\int_0^\pi \sqrt{1 + (g'(x))^2} dx + \int_0^\pi \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx} \\ &= \int_0^\pi \sqrt{1 + (g'(x))^2} dx + \int_0^\pi \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \end{aligned}$$

**P7.** Sea  $P, Q \in \mathbb{R}^3$  y  $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización arbitraria de una curva  $\Gamma$  con  $\vec{r}(a) = P$  y  $\vec{r}(b) = Q$ . Probar que  $L(\Gamma) \geq \|v\|$ , donde  $v = Q - P$ , es decir el segmento entre  $P$  y  $Q$  entrega el menor camino posible. Para esto siga los siguientes pasos:

a) Considere la integral  $\int_a^b \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \cdot v dt$  y calcule su valor.

b) Concluya utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz  $u \cdot v \leq \|u\| \|v\|$

**Solución:**

a) Consideremos  $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ r_3(t) \end{pmatrix}$  y  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$  donde  $r_i: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y  $v_i \in \mathbb{R}$ ,  $\forall i$ . Entonces

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t) \cdot v = \begin{pmatrix} r'_1(t) \\ r'_2(t) \\ r'_3(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = r'_1(t)v_1 + r'_2(t)v_2 + r'_3(t)v_3$$

Luego, ocupando que  $\vec{r}(a) = P$  y  $\vec{r}(b) = Q$ .

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \cdot v dt &= \int_a^b (r'_1(t)v_1 + r'_2(t)v_2 + r'_3(t)v_3) dt \\ &= \int_a^b r'_1(t)v_1 dt + \int_a^b r'_2(t)v_2 dt + \int_a^b r'_3(t)v_3 dt \\ &= v_1 \int_a^b r'_1(t) dt + v_2 \int_a^b r'_2(t) dt + v_3 \int_a^b r'_3(t) dt \\ &= v_1 \cdot (r_1(b) - r_1(a)) + v_2 \cdot (r_2(b) - r_2(a)) + v_3 \cdot (r_3(b) - r_3(a)) \\ &= v_1 \cdot v_1 + v_2 \cdot v_2 + v_3 \cdot v_3 \\ &= v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \\ &= \|v\|^2 \end{aligned}$$

b) Consideremos nuevamente la integral  $\int_a^b \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \cdot v dt$  Usaremos Cauchy-Schwarz sobre  $\frac{d\vec{r}}{dt}(t) \cdot v$ .

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \cdot v dt &\leq \int_a^b \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| \cdot \|v\| dt \\ &= \|v\| \int_a^b \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| dt \\ &= \|v\| \cdot L(\Gamma) \end{aligned}$$

Ocupando el resultado de a) se tiene que

$$\int_a^b \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \cdot v dt = \|v\|^2 \leq \|v\| \cdot L(\Gamma)$$

Tomando la ultima desigualdad y pasando diviendo  $\|v\|$ , se concluye que

$$\|v\| \leq L(\Gamma)$$

**P8.** Escribir la ecuación paramétrica del lugar geométrico constituido por todos los puntos cuyo producto de distancias a dos puntos fijos  $F_1$  y  $F_2$  (tal que  $\text{dist}(F_1, F_2) = 2a$ ) es una magnitud constante igual a  $a^2$ , con  $a > 0$ . Utilice coordenadas polares.

### Solución

Sea  $(x, y)$  un punto de la curva, sin perdida de generalidad el punto  $F_1$  posee coordenadas  $(-a, 0)$  y  $F_2$  posee coordenadas  $(a, 0)$  (por ejemplo pueden ser los focos de una elipse). Luego aplicando la condición

$$\sqrt{(x+a)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = a^2$$

elevamos al cuadrado y con un poco de algebra obtenemos que

$$(x^2 + y^2 + a^2 + 2ax)(x^2 + y^2 + a^2 - 2ax) = a^4$$

Lo ultimo es una suma por diferencia

$$(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 = a^4$$

Aqui aplicamos polares, recordando que  $x^2 + y^2 = r^2$  y  $x = r \cos(\theta)$

$$(r^2 + a^2)^2 - 4a^2r^2 \cos^2(\theta) = a^4$$

De aqui despejando  $r$ , considerando que  $r > 0$ , se obtiene que  $r = \sqrt{2a \cos(\theta)}$ . Luego parametrizando se tiene que

$$\vec{r}(\theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = (\sqrt{2a \cos(\theta)} \cdot \cos(\theta), \sqrt{2a \cos(\theta)} \cdot \sin(\theta))$$

### P9. [P2 a) Examen Recuperativo 2010-2]

Considere la curva  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$  parametrizada por

$$\vec{r}(t) = \left( \int_0^t \cos\left(\frac{u^2}{2c^2}\right) du, \int_0^t \sin\left(\frac{u^2}{2c^2}\right) du \right) \quad t \in [0, \infty)$$

Donde  $c$  es una constante positiva. Encuentre

a)  $\hat{T}(t)$ ,  $\hat{N}(t)$ ,  $\hat{B}(t)$  y su  $\kappa(t)$

b) De un argumento geométrico de porque la torsión es 0 y corrobore esto mediante el calculo según su respectiva formula.

**P10.** Considere la curva  $\Gamma$  que se forma al intersectar las superficies:

$$x^2 + y^2 = a^2 \text{ y } (z - x)(z + x) = y^2$$

a) Encuentre una parametrización de  $\Gamma$ . ( $a > 0$ )

**Solución:** Falto agregar al enunciado  $z > 0$ . Notar que  $(z - x)(z + x) = y^2 \iff z^2 = x^2 + y^2$  y al interceptar las dos ecuaciones se tiene que:

$z^2 = a^2 \Rightarrow z = a$  y como  $x^2 + y^2$  puede parametrizarse fácilmente con  $\cos$  y  $\sin$  se tiene que:

$$\vec{r}(t) = (a \cos(t), a \sin(t), a).$$

b) Calcule el centro de masa dada por  $\rho(x, y, z) = x + y + z$ .

**Solución:**

Por lo tanto  $\rho(\vec{r}(t)) = 3(\cos(t) + \sin(t)) + a$ .

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (-3 \sin(t), 3 \cos(t)) + 0.$$

$$\left| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right| = 1$$

$$M = \int_0^{2\pi} \rho(\vec{r}(t)) \left| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right| dt = \int_0^{2\pi} (3 \cos(t) + 3 \sin(t) + a) dt = 2a\pi a$$

Ahora para sacar el centro de masa se debe usar la fórmula:

$$x_g = \frac{1}{M} \int_{\Gamma} x \rho dl, y_g = \frac{1}{M} \int_{\Gamma} y \rho dl, z_g = \frac{1}{M} \int_{\Gamma} z \rho dl$$

El resultado es  $(\frac{9}{2a}, \frac{9}{2a}, a)$

**P11.** Encontrar todas las funciones  $f(t)$  tales que la curva parametrizada por  $\vec{r}(t) = (e^t, f(t), \lambda f(t))$ , con  $t \in \mathbb{R}$  y  $\lambda$  una constante real, sea una recta.

**Solución:** No hacerlo pifia vicho :C

**P12.** Sea una curva  $\Gamma$  que cumple con que existe un punto  $P_0$  por el cual pasan todas las rectas normales de  $\Gamma$ . Se define  $P_0 = \vec{\sigma}(s) + \phi(s)\hat{N}(s)$ , donde  $\vec{\sigma}(s)$  es la parametrización en longitud de arco de  $\Gamma$ ,  $(\hat{N})(s)$  es el vector normal a  $\Gamma$  y  $\phi$  es una función de clase  $\mathcal{C}^1$  con  $\phi : [0, l_0] \rightarrow \mathbb{R}$ . Demuestre que  $\kappa(s) = 1$ ,  $\tau(s)\phi(s) = 0$  y  $\phi'(s) = 0$ , donde  $\kappa(s)$  y  $\tau(s)$  son la curvatura y la torsión respectivamente. Concluya que  $\Gamma$  es una curva plana.

*Indicación: Quizás le sea útil ocupar que  $\hat{T}$ ,  $\hat{N}$  y  $\hat{B}$  son linealmente independientes.*

**Definición: (Independencia Lineal)** Sea  $\{v_1, v_2, \dots, v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$  diremos que estos vectores son linealmente independientes si  $\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i = \vec{0} \Rightarrow \lambda_i = 0, \forall i = 1, \dots, m$

**Solución:**

Consideremos la igualdad  $P_0 = \vec{\sigma}(s) + \phi(s)\hat{N}(s)$ , Derivando a ambos lados se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{dP_0}{ds} &= \frac{d}{ds} (\vec{\sigma}(s) + \phi(s)\hat{N}(s)) \\ \vec{0} &= \frac{d\vec{\sigma}}{ds}(s) + \phi'(s)\hat{N}(s) + \phi(s)\frac{d\hat{N}}{ds}(s) \\ \vec{0} &= \hat{T}(s) + \phi'(s)\hat{N}(s) - \kappa(s)\hat{T}(s) + \tau(s)\hat{B}(s) \quad (\text{Formula de Frenet}) \\ \vec{0} &= \underbrace{(1 - \kappa(s)\phi(s))}_{\lambda_1} \hat{T}(s) + \underbrace{\phi'(s)}_{\lambda_2} \hat{N}(s) + \underbrace{\phi(s)\tau(s)}_{\lambda_3} \hat{B}(s) \end{aligned}$$

De lo anterior, notando que  $\kappa(s), \phi(s), \phi'(s)$  y  $\tau(s)$  son funciones en los reales, podemos aplicar la independencia lineal de  $\hat{T}, \hat{N}$  y  $\hat{B}$ .

Por lo que se obtiene las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} 1 - \kappa(s)\phi(s) &= 0 \Rightarrow \kappa(s)\phi(s) = 1 \Rightarrow \phi(s) \neq 0 \\ \phi'(s) &= 0 \Rightarrow \phi'(s) = cte \neq 0 \\ \phi(s)\tau(s) &= 0 \Rightarrow \tau(s) = 0 \Rightarrow \text{Curva Plana} \end{aligned}$$

Notar que en la primera igualdad, si  $\phi(s) = 0$  entonces se tendria que  $0 = 1$  lo que es una contradicción, por lo que  $\phi(s) \neq 0$

**P13.** Se tiene una curva regular  $\Gamma$  en  $\mathbb{R}^3$ , parametrizada en longitud de arco por  $\vec{r}(s)$ , con curvatura  $k(s)$  y torsión  $\tau(s)$ . Determinar la curvatura de  $\frac{d\vec{r}(s)}{ds}$ .

**P14.** Considere la curva  $\Gamma$  descrita por  $\vec{r}(t) = f(t)(\cos(t), \sin(t))$  con  $t \in [0, \infty)$ . Donde  $f$  es de clase  $\mathcal{C}^1$  y  $0 \leq f(t) \leq 1, \forall t \geq 0$ .

a) Muestre que si  $L(\Gamma)$  es finito y  $f$  decreciente, entonces  $f(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$

b) Muestre que si  $f(t) = \frac{1}{t+1}$ , entonces  $L(\Gamma)$  es infinito.

c) Si  $f(t) = \frac{1}{(t+1)^2}$ . ¿Es finito  $L(\Gamma)$ ?

d) Caracterize (en terminos de existencia de integrales impropias) las funciones  $f$  tales que  $L(\Gamma)$  es finito.

e) Use el resultado de la parte d) para mostrar que el resultado de la parte a) se mantiene aun sin la hipótesis de que  $f$  sea decreciente.

**P15.** Para las siguientes integrales impropias, identifique su tipo y si diverge o converge.

$$a) \int_0^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{1+x^2} dx$$

$$e) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x) dx$$

$$b) \int_3^{\infty} \frac{1}{x+e^x} dx$$

$$f) \int_{1-}^{\infty} \frac{4dx}{x^2 \sqrt[4]{x^2-1}}$$

$$c) \int_3^{\infty} \frac{1}{x-e^{-x}} dx$$

$$g) \int_0^{\infty} \frac{x^\alpha}{1+x} dx, \alpha > 0$$

$$d) \int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$$

$$h) \int_1^{\infty} \left( \frac{1}{x \ln^2(x)} - \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx$$

**Solución:**

a) Converge

e) Diverge

b) Converge

f) Converge

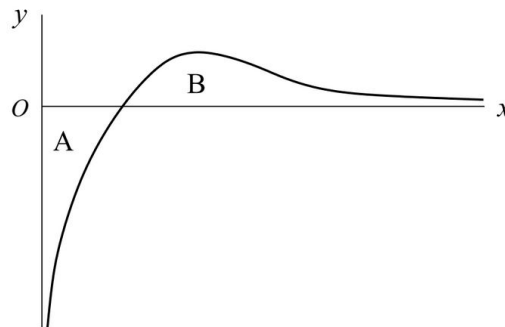
c) Diverge

g) Diverge

d) Converge

h) Converge

**P16.** Sea  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}$  (ver figura). Probar que las áreas de  $A$  y  $B$  son finitas e iguales. Indicación: para probar la igualdad, use el cambio de variables  $y = 1/x$ .



**Solución:** Malla vieja-;Control 3-;Control 6 2003 P1

**P17.** Determine la convergencia de  $\int_{0+}^{\infty} \frac{1}{x \ln^p(x)} dx$  según el valor de  $p \in \mathbb{R}$

Haciendo el cambio de variable

$$u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$$

tenemos que la integral a estudiar es equivalente a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{u^p}$$

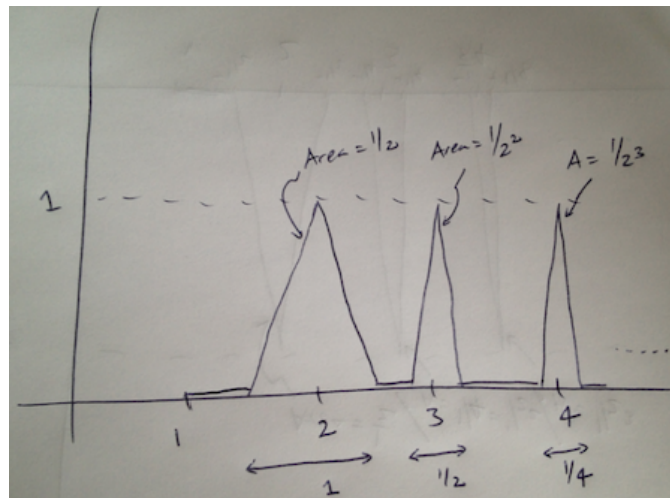
La cual es mixta, ya que hay infinitos en los límites de integración (esto lo hace ser de primera especie) y en  $x = 0$  explota la función (esto lo hace ser de segunda especie). Por lo que separando para deshacer las integrales mixtas se obtiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{u^p} = \underbrace{\int_{-\infty}^a \frac{du}{u^p}}_{1^{era}} + \underbrace{\int_a^0 \frac{du}{u^p}}_{2^{da}} + \underbrace{\int_0^b \frac{du}{u^p}}_{2^{da}} + \underbrace{\int_b^{\infty} \frac{du}{u^p}}_{1^{era}}$$

Y aquí necesitamos que las de primera especie cumplan que  $p > 1$  para converger y necesitamos que las de segunda especie cumplan que  $p < 1$ , lo cual jamás pasará simultáneamente, por lo tanto se concluye que la integral diverge.

**P18.** Considere  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua tal que  $\int_1^{\infty} f(x)dx$  existe. Demuestre o refute que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  ¿Podría generalizar su resultado para  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ell$ ?

Basta considerar el siguiente contraejemplo



Es decir una función que tenga valor 0 y en cada número natural mayor o igual a 2, se levante un triángulo isóceles de altura 1 y base  $(\frac{1}{2})^n$ . Es fácil darse cuenta que el límite de la función no existe debido a que en el infinito puedo estar en 0 o puedo ser la cúspide de un triángulo, es decir, puedo estar en 1. Y por otro lado

$$\int_1^{\infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=2}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1$$

Donde en la última igualdad se calculó el límite a una suma geométrica.

En el caso general basta notar que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ell \iff \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - \ell = 0$

Por lo que se refuta siempre.



**P19.** Considere la función  $f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ .

- Calcule, si existe, el área de la región bajo la curva en el primer cuadrante.
- Demuestre que el volumen de revolución en torno al eje OX de la región anterior, existe (no lo calcule).

**Solución:** Ver pauta control 3-2011-2

**P20.** Para  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  continua se define la integral:

$$L(f) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx$$

- Demostrar que si existen  $M$  y  $b$  reales tales que  $\forall x \in [0, \infty)$ ,  $|f(x)| \leq M e^{bx}$ , entonces la integral  $L(f)$  converge para todo  $\alpha > b$ .
- Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^2$  y tal que existen los reales de la parte anterior que acotan a  $f(x)$ ,  $f'(x)$  y  $f''(x)$ . Demostrar que para  $\alpha > b$

$$L(f') = \alpha L(f) - f(0)$$

y con esto concluya que:

$$L(f'') = \alpha^2 L(f) - \alpha f(0) - f'(0)$$

- Pruebe que para  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $L(\lambda f) = \lambda L(f)$  y concluya que:

$$L(\sin(\omega x)) = \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$

**Solución:** Ver pauta control 3-2016-2

**P21.** Considere la integral impropia  $\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx$

- Demuestre que la integral es absolutamente convergente.

**Solución:**  $\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx \leq \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \arctan(b) - \arctan(0) = \frac{\pi}{2}$

Por lo tanto al estar acotada por una constante  $\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx$  converge absolutamente.

- Concluya que la integral  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx$  también lo es.

**Solución:** Notar que la función  $\frac{\cos(x)}{1+x^2}$  es par y como la integral desde 0 a  $\infty$  converge (si converge absolutamente, entonces converge) es valido decir que la de  $-\infty$  a  $\infty$  es dos veces esta (dos veces una que converge también converge).

Recordar que en caso de no converger no pueden usarse las propiedades de paridad en las integrales

**P22.** Calcular las siguientes integrales:

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} e^{x-e^x} dx$$

**Solución:**

b) El cambio apañador es  $u = e^x$  y el resultado es 1

$$c) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4}$$

**Solución:**

**P23.** El cambio apañador es  $u = 2 \tan x$  y el resultado es  $\frac{\pi}{2}$

**P24.** Sea  $f$  una función de clase  $C^2$  en  $[0, 1]$ , verificando que  $f(0) = 0$ . Demuestre que la integral:

$$\int_0^1 f(x) x^{-\frac{3}{2}} dx$$

Converge

**Solución:** Para demostrar esto se buscara aumentar el grado de  $x$  para que converja.

$$\int_0^1 f(x) x^{-\frac{3}{2}} dx = \lim_{a \rightarrow 0} f(x) (-2) x^{-\frac{1}{2}} \Big|_a^1 + 2 \int_a^1 f'(x) x^{-\frac{1}{2}} dx = N + I$$

Si demostramos que  $N$  e  $I$  son números se demostrara que converge.

Partamos por  $N$ :

$$N = \lim_{a \rightarrow 0} f(1) - \frac{f(a)}{a^{\frac{1}{2}}} \stackrel{L'H}{=} f(1) - \lim_{a \rightarrow 0} \frac{f'(a)}{a^{-\frac{1}{2}}} = f(1) - \lim_{a \rightarrow 0} f'(a) a^{\frac{1}{2}} = f(1) \Rightarrow N \text{ es un número.}$$

Para no tener inconvenientes al acotar  $I$  demostraremos que  $I$ , converge absolutamente  $2 \int_a^1 |f'(x) x^{-\frac{1}{2}}| dx \leq 2 \int_a^1 M x^{-\frac{1}{2}} dx = 2M \int_a^1 x^{-\frac{1}{2}} dx$ , como  $f$  es de clase  $C^2$  se tiene que  $f'$  es continua y por ende acotada entre  $[0, 1]$ .

Como se sabe que  $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ , converge para  $\alpha < 1$ , se tiene que para este caso converge y finalmente  $I$  es un número.

Por lo tanto  $\int_0^1 f(x) x^{-\frac{3}{2}} dx$  converge, pues su límite existe.