MA1002 Cálculo Diferencial e Integral, Verano 2023
Profesor: Leonardo Sánchez Cancino
Auxiliares: Patricio Yáñez Alarcón

Auxiliar Series

P1. *a)* Calcule el límite

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{n!}{n^n})^{\frac{1}{n}}$$

b) Estudia

$$\int_0^{\infty} \frac{arctg(x)}{x^{\frac{3}{2}}}$$

c) **Criterio Integral Impropia**
Determine los valores de $p \in \mathbb{R}$ para los cuales la siguiente serie numérica converge:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)^p}$$

d) **Criterio del Cuociente**
Estudie si la siguiente serie converge:

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{n^n}{n!} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

e) **Criterio de Comparación por Cuociente**
Estudie la convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1-\cos(\frac{1}{n})}{n}$$

f) **Criterio de la Raíz n-ésima**
Estudie la convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$$

g) **Series de Potencias**
Considere la función definida por:

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$

1) Calcule el radio de convergencia y entregue el intervalo de convergencia, estudiando lo que ocurre en los extremos.
2) Calcule $f'(x), f''(x), f'(0), f(0)$.
3) Identifique $f''(x)$ como una serie geométrica e integre para encontrar explícitamente la función f.

4) Calcule el valor de la serie numérica:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}$$

h)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^k\sqrt{\left(\frac{k}{k^2+1}\right)}$$

Recuerdo:

- Una sucesión (x_n) se dirá de Cauchy si:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n,m\geq N,\quad |x_n-x_m|<\varepsilon$$

- Una sucesión es convergente si y sólo si es de Cauchy.
- Sea (a_n) una sucesión. Luego $\sum a_k$ converge si y sólo si:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n,m\geq N,\ m>n \implies \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right|<\varepsilon$$

- Si $\sum a_k$ converge, entonces $a_n\to 0$.
- Sean $\sum a_k$ y $\sum b_k$ dos series convergentes y $\lambda\in\mathbb{R}$. Entonces la siguiente suma converge:

$$\sum(a_k+\lambda b_k)=\sum a_k+\lambda\sum b_k$$

- Una serie de términos no negativos converge si y solo si las sumas parciales son acotadas superiormente.
- **Comparación:** Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones no negativas de manera que existe n_0 y $\alpha>0$ tales que, para todo $n\geq n_0$, $a_n\leq\alpha b_n$. Se tiene que si $\sum b_k<\infty$, entonces $\sum a_k<\infty$.
- **Comparación por Cuociente:** Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones positivas tales que $c=\lim\frac{a_n}{b_n}$ existe.
  - *a*) Si $c=0$ y $\sum b_k$ converge, entonces $\sum a_k$ converge.
  - *b*) Si $c>0$, $\sum b_k$ converge si y sólo si $\sum a_k$ converge.
- **Criterio del Cuociente:** Sea (a_n) una sucesión tal que $r=\lim\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ existe.
  - *a*) Si $r<1$ entonces $\sum a_k$ converge.
  - *b*) Si $r>1$ entonces $\sum a_k$ diverge.
  - *c*) Si $r=1$ no se sabe.
- **Criterio de la Raíz:** Sea (a_n) una sucesión de términos no negativos tal
  - *a*) Si $r<1$ entonces $\sum a_k$ converge.
  - *b*) Si $r>1$ entonces $\sum a_k$ diverge.
  - *c*) Si $r=1$ no se sabe.

  Obs: En este criterio se puede reemplazar r por $r=\lim_n\sup a_n=\lim_n\sup\{a_k:k\geq n\}$
- **Criterio de la Integral:** Sea $k\in\mathbb{N}$ y $f:[k,\infty)\to\mathbb{R}_+$ una función decreciente. Se tiene que $\sum_{n\geq k} f(n)$ converge si y sólo si $\int_k^\infty f(x)dx$ converge.
- Sea (a_k) una sucesión. Diremos que $\sum a_k$ es absolutamente convergente si $\sum|a_k|$ converge.
- Toda serie absolutamente convergente es convergente. Además una serie es absolutamente converge si y sólo si la series de sus términos negativos y la de sus términos positivos convergen.
- Si una serie converge, pero no converge absolutamente se le dirá condicionalmente convergente.
- **Criterio de Leibnitz:** Sea (a_n) una sucesión decreciente tal que $a_n\to 0$. Entonces $\sum(-1)^n a_n$ es convergente.
- Sea (a_k) una sucesión. Si $\sum|a_k|$ converge, luego cualquier reenumeración (b_k) verifica que $\sum b_k=\sum a_k$ converge.
- Sea (a_k) tal que $\sum a_k$ es condicionalmente convergente. Luego para todo $\alpha\in\mathbb{R}$ existe una reenumeración b_n tal que $\sum b_k=\alpha$.
- Sean $\sum a_k$ y $\sum b_k$ dos series absolutamente convergentes, entonces su producto es $\sum c_k$, donde (c_k) es cualquier sucesión que contiene exactamente una vez cada producto posible. En particular podemos tomar $c_k=\sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}$.

Recuerdo:

- [**Series de Potencias**]: Una serie de potencias es una serie de la forma: $\sum\limits_{k=0} a_k(x-\alpha)^k$, para este curso estudiaremos el caso de $\alpha = 0$.
- [**Radio de convergencia**]: Se define el radio de convergencia R como
$$R = \sup\{x_0 : \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k < \infty\}$$
- [**Intervalo de convergencia**]: Se llama intervalo de convergencia al intervalo I tal que $\forall x \in I$ la serie de potencias converge, se debe cumplir que $(-R,R) \subseteq I \subseteq [-R,R]$.

  Por lo que para calcular el intervalo de convergencia I se necesita encontrar R, con esto garantizamos que I a lo menos será el intervalo abierto $(-R,R)$, luego se estudia la frontera, es decir, se estudia si la serie converge para $x = R$ o $x = -R$, en caso de converger en alguno de estos valores, se añadirá al intervalo $(-R,R)$, de esta forma se corrobora que $(-R,R) \subseteq I \subseteq [-R,R]$.
- Para calcular el radio de convergencia de una serie de potencias de la forma $\sum\limits_{k\geq n_0} a_n x^n$ existe las siguientes tres formas (todas entregaran el mismo valor si existe), cual usar dependerá del ejercicio.
  1) $L = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$
  2) $L = \lim\limits_{n\to\infty} (|a_n|)^{\frac{1}{n}}$
  3) $L = \lim\limits_{n\to\infty} sup_{k\geq n}(|a_n|)^{\frac{1}{n}}$

  En caso de existir L se tiene que el radio de convergencia es: $R = \dfrac{1}{L}$
- Dada una serie de potencias $\sum a_k x^k$ con intervalo de convergencia I , definimos:
$$f(x) = \sum a_k x^k$$
  Esta función es continua, derivable e integrable. Más aún las integrales y derivadas son término a término, esto es que la derivada o la integral la pueden "pasar"para dentro de la serie
- Dadas dos series de potencias $\sum a_k x^k$ y $\sum b_k x^k$ convergentes para x_0. Entonces la serie $\sum(a_k + b_k)x^k$ converge para todo $x \in (-|x_0|, |x_0|)$ y se tiene que $\sum(a_k + b_k)x^k = \sum a_k x^k + \sum b_k x^k$. Además si $c_k \sum_{j=1}^{k} a_j b_{k-j}$, la serie $\sum c_k x^k$ converge para todo $x \in (-|x_0|, |x_0|)$ y se tiene que $\sum c_k x^k = (\sum a_k x^k)(\sum b_k x^k)$.
- Aprenderse $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ para $|x| < 1$ y sus variantes y traslaciones como:
  - $f(-x) = \dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-x)^n$ para $|x| < 1$
  - $f(x-1) = \dfrac{1}{1-(x-1)} = \dfrac{1}{x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (x-1)^n$ para $|x-1| < 1$

  Y ocupar derivadas e integrales para calcular otras funciones (por ejemplo logaritmos).

"Siempre fuertes a luchar, el trabajo tesonero todo lo vence"
La verdad fue todo un gusto y honor haberles hecho clases auxiliares, se despide la dupla Javier y Patricio, opuestos complemetarios en la matraca, nos vemos en la Uni!!