

Calculus Diferencial e Integral Control 3 (MA1002-2)

Parte Problema 1

a) Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{i-n}{i^2+n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i-n}{n^2 \left(\left(\frac{i}{n} \right)^2 + 1 \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{i}{n} - 1}{\left(\frac{i}{n} \right)^2 + 1} \cdot \frac{1}{n}$

Donde $\frac{b-a}{n} = \frac{1}{n} \Rightarrow b-a=1 \wedge x_i = a + \frac{b-a}{n} i = a + \frac{1}{n} i = \frac{i}{n} \Rightarrow a=0$

Entonces para la partición equiespecialde $\begin{cases} 0=0 \\ b=1 \end{cases} \wedge f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$

Sigue que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{i-n}{i^2+n^2} = \int_0^1 \frac{x-1}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x dx}{x^2+1} - \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$

$= \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \Big|_0^1 - \arctan(x) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4}$

b) Calcule $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x(\ln x + \ln^2 x)}$ Por sustitución $u = \ln x; du = \frac{dx}{x}$

$x=e \Rightarrow u=1, x=e^2 \Rightarrow u=2$

Donde $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x(\ln x + \ln^2 x)} = \int_1^2 \frac{du}{u+u^2} = \int_1^2 \frac{du}{u(u+1)} = \int_1^2 \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right)$

$= [\ln u - \ln(u+1)]_1^2 = \ln \left(\frac{u}{u+1} \right) \Big|_1^2 = \ln \left(\frac{2}{3} \right) - \ln \left(\frac{1}{2} \right) = \ln \left(\frac{2/3}{1/2} \right) = \ln \left(\frac{4}{3} \right)$
Cualquiera es válido

c) Estudiar la convergencia de los integrales.

i) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^{3/2}}$ Es impropia mixta de 2ª especie en 0 y μ_a en ∞

Donde $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^{3/2}} = \int_0^1 \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx + \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^{3/2}}$ en donde.

$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^{3/2}}$ converge por comparación en $\int_0^1 \frac{dx}{x^{3/2}}$ pues $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^{3/2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1/2x^{1/2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1/2x^{1/2}} = 2 \neq 0$

$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^{3/2}}$ es tal que $\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x^{3/2}} dx$ se compare en $\frac{|\sin x|}{x^{3/2}} \leq \frac{1}{x^{3/2}}$

y como $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ converge $\Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^{3/2}}$ es Absolut. Convergente y por lo tanto converge. Entera $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx$ es Convergente.

ii) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ es impropia por ∞ y se compare en $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ convergente

Donde $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = 1 \neq 0$ Donde $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ CONVERGE

Cálculo Diferencial e Integral Control 3 (MA1002-2)

Prueba Problema 2

- a) Probar que la ecuación $\int_0^x e^{t^2} dt = 1$ tiene solución única en $[0,1]$
 Sea $f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt - 1$. Como e^{t^2} es continuo en $[0,1]$, $f(x)$ es continuo en $[0,1]$ y derivable en $(0,1)$ (Por TFC)
 Además $f(0) = \int_0^0 e^{t^2} dt - 1 = 0 - 1 = -1 < 0$ y $f(1) = \int_0^1 e^{t^2} dt - 1 > \int_0^1 1 dt - 1 = 0$
 Sigue que $f(0) \cdot f(1) < 0$ en f continua en $[0,1]$, entonces

0.5) por TVI, $\exists \xi \in (0,1)$ tal $f(\xi) = 0 \Rightarrow \int_0^\xi e^{t^2} dt = 1$ (solución)
 Además $f'(x) = e^{x^2} > 1 > 0$ en $(0,1)$ por TFC, entonces f es creciente estricta en $(0,1)$ y por lo tanto $\xi \in (0,1); f(\xi) = 0$ es único

- b) Demostrar que $F(x) = \int_0^{\arcsin x} \arcsin(t) dt$, tiene un máximo en $x = \frac{\pi}{2}$ y un mínimo en $x = 0$ y calcúlelos

0.3) calculamos $F'(x) = \left(\int_0^{\arcsin x} \arcsin(t) dt \right)' = \overbrace{\arcsin(\arcsin x)}^x \cdot \arcsin x = x \arcsin x$

0.2) Entonces $F'(x) = 0$ si $x \arcsin x = 0$ si $\begin{cases} x = 0 \\ x = \pi/2 \end{cases}$

Ahora $F'(x) = \arcsin x \rightarrow \arcsin x \Rightarrow F'(0) = 0 > 0 \Rightarrow 0$ es pto de mínimo

0.5) y $F'(\pi/2) = -\pi/2 < 0 \Rightarrow \pi/2$ es pto de Máximo.

0.2) Para sus valores $F(0) = \int_0^{\arcsin(0)=0} \arcsin(t) dt = 0$; $F(0) = 0$

0.2) $F(\pi/2) = \int_0^{\arcsin \pi/2} \arcsin(t) dt = \int_0^1 \arcsin(t) dt$ Partes $u = \arcsin t \rightarrow du = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

0.8) $\Rightarrow F(\pi/2) = t \arcsin t \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{\pi}{2} + \sqrt{1-t^2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1$

- c) Calcule $f(0)$ y $f'(0)$ si f satisface la ecuación $x = e^x \int_1^{f(x)} e^{-t^2} dt$

0.5) Para $x=0$; $0 = e^0 \int_1^{f(0)} e^{-t^2} dt \Rightarrow \int_1^{f(0)} e^{-t^2} dt = 0 \Rightarrow$ necesariamente $f(0) = 1$

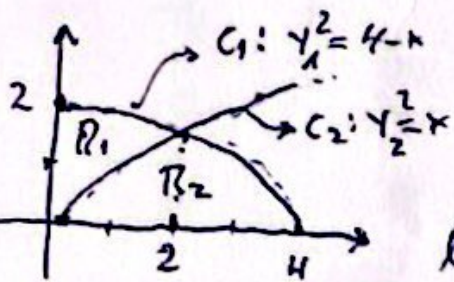
0.2) Para $f(x)$ derivando queda $1 = e^x \int_1^{f(x)} e^{-t^2} dt + e^x e^{-f(x)^2} \cdot f'(x)$ y en $x=0$
 con $f(0) = 1 \Rightarrow 1 = e^0 \int_1^{f(0)=1} e^{-t^2} dt + e^0 \cdot e^{-1^2} f'(0) \Rightarrow 1 = \frac{f'(0)}{e}$

0.8) entonces $f'(0) = e //$

Calculo Diferencial e Integral Control 3 (MA1002-2)

Prüfung Problem 3

a)



Prüfung: $C_1 \cap C_2 = \{x / y_1^2 = y_2^2\} = \{x / \frac{4-x}{2} = x\}$
 $2x = 4 \Rightarrow C_1 \cap C_2 = (2,0) \wedge C_1 \cap OX = (4,0)$

(0.5) →

$$\text{Also, } V_{OK}(R_1) = \pi \int_0^2 (y_1^2 - y_2^2) dx = \pi \int_0^2 ((4-x) - x) dx$$

(1.5) →

$$= \pi \int_0^2 (4-2x) dx = \pi [4x - x^2]_0^2 = \pi (8-4) = 4\pi \Rightarrow V_{OK}(R_1) = 4\pi$$

(0.5) →

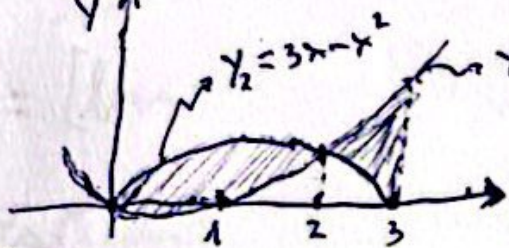
$$\text{Para } V_{OK}(R_2) = \pi \left[\int_0^2 y_2^2 dx + \int_2^4 y_1^2 dx \right] = \pi \left[\int_0^2 x dx + \int_2^4 (4-x) dx \right]$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2} x^2 \Big|_0^2 + \left[4x - \frac{1}{2} x^2 \right]_2^4 \right] = \pi [2 + (16-8) - (8-2)] = 4\pi$$

(1.5) →

Significa que $V_{OK}(R_1) = V_{OK}(R_2) = 4\pi$

b)



Prüfung: Las parábolas se cortan en $\{x / y_1 = y_2\} = \{x / 3x - x^2 = x^2 - x\} = \{x / 2x^2 = 4x\}, x=0 \wedge x=2$

(0.5) →

Entonces, área entre las curvas en $[0,3]$ será.

(0.5) →

$$A = \int_0^3 |y_2 - y_1| dx = \int_0^2 (y_2 - y_1) + \int_2^3 -(y_2 - y_1) = \int_0^2 (3x - x^2) - (x^2 - x) dx +$$

(0.8) →

$$+ \int_2^3 [(x^2 - x) - (3x - x^2)] dx = \int_0^2 (4x - 2x^2) dx + \int_2^3 (2x^2 - 4x) dx =$$

$$= \left[2x^2 - \frac{2}{3} x^3 \right]_0^2 + \left[\frac{2}{3} x^3 - 2x^2 \right]_2^3 = (8 - \frac{16}{3}) + (18 - 18 - (\frac{16}{3} - 8))$$

$$= 8 - \frac{16}{3} - \frac{16}{3} + 8 = 16 - \frac{2}{3} 16 = \frac{16}{3}$$

(0.2) →

Así, área entre y_1 e y_2 es $A = \frac{16}{3}$