

Cálculo Diferencial - Control 2 (MA1002-02)

Pauta Problema 1

$$f(x) = 1 + x e^{1/x}$$

- 1) $\text{Dom } f: \mathbb{R} - \{0\}$ y f es continuo en su dominio por algebra de continuas (suma, producto, composición)

0.3

Es preciso estudiar $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ para ver si es posible incorporar $x=0$ como punto de discontinuidad reparable.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x e^{1/x}) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + x e^{1/x}) = 1 + \lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{1/x} = 1 + 0 \cdot 0 = 1$$

0.7

Así $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ NO EXISTE $\Rightarrow$ No hay reparación en $x=0$

- 2) Asíntota horizontal: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + x e^{1/x}) \rightarrow 1 + \infty = \infty$ No Hay

Asíntota vertical: Del punto anterior $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$ de modo que

0.5

f tiene asíntota vertical en $x \rightarrow 0^+$.

Asíntota oblicua: $y = mx + n$ en $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$, $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x e^{1/x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} + e^{1/x} \right) = 0 + e^0 = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [1 + x e^{1/x} - x] = 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{1/x} - 1) = 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} = 1 + 1 = 2$$

El último límite por L'Hopital o Límite conocido.

0.5

Segue que $y = x + 2$ es asíntota oblicua.

0.5

3) $f'(x) = e^{1/x} + x e^{1/x} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{1/x} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = e^{1/x} \frac{x-1}{x}$

Segue que $f'(x) = 0$ si $x = 1$ y f no es derivable en $x=0$

Crecimiento: $x \mid (-\infty, 0) \mid (0, 1) \mid (1, \infty)$ Así, f crece en $\mathbb{R}^+$, decrece en $(0, 1)$

1.0

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
f'	> 0	< 0	> 0
	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

y crece en $(1, \infty)$.
 $x=1$ es punto de mín. Local.

$$4) \because f(-2) = 1 - 2e^{-1/2} = 1 - \frac{2}{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}-2}{\sqrt{e}} < 0 \quad (\sqrt{e} < 2)$$

$$f(-1) = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} > 0 \quad (e > 1)$$

Donde $f(-2) \cdot f(-1) < 0$ y f es continua en $[-2, -1]$, entonces por Teorema

0.5 de Bolzano (o valor intermedio) existe $x_0 \in [-2, -1]$ tal que $f(x_0) = 0$.
Además, f es creciente estricta en $[-2, -1]$ (según $f'(x)$) por lo tanto x_0 es único en $[-2, -1]$ y además $f(x) > 0$ en $\mathbb{R}^+$, de modo que x_0

0.5 es el único cero en $\text{Dom } f$.

$$5) f''(x) = e^{1/x} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \left(1 - \frac{1}{x}\right) + e^{1/x} \frac{1}{x^2} = \frac{e^{1/x}}{x^2} \left[-1 + \frac{1}{x} + 1\right] = \frac{e^{1/x}}{x^3}$$

0.5 $\rightarrow f''(x) \neq 0 \quad \forall x \in \text{Dom } f$, $f''(x)$ no existe en $x=0$

Convexidades

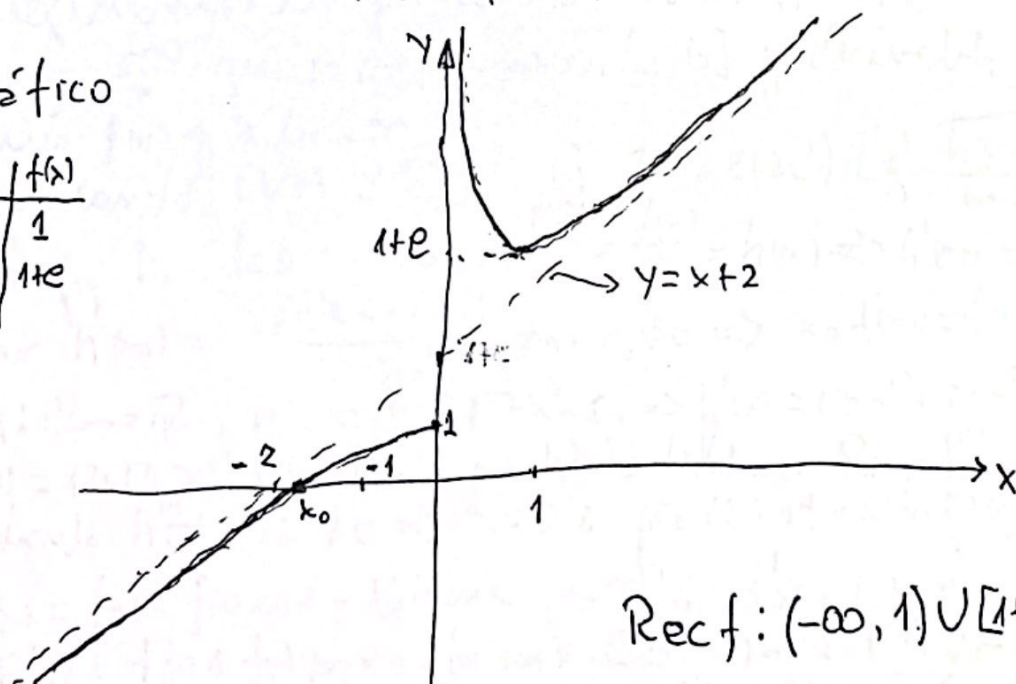
x	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
f''	< 0	> 0
	Concava	Convexa

No Hay inflexiones ($0 \notin \text{Dom } f$)

0.5 $\rightarrow$

6) Gráfico

x	$f(x)$
$\rightarrow 0^-$	1
1	$1+e$

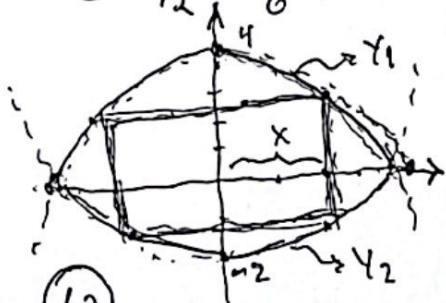


0.5 $\rightarrow$

$$\text{Rec } f : (-\infty, 1) \cup [1+e, \infty)$$

Calculus Diferencial e Integral Control 2 (MA 1002- Parte Problema 2

a) Las funciones corresponden a las parábolas $y_1 = 4 - \frac{1}{3}x$ e $y_2 = \frac{1}{6}x^2 - 2$ que se cortan en $x = \pm 2\sqrt{3}$ en el eje Ox



Sea $x \in (0, 2\sqrt{3})$ la mitad del largo del rectángulo inscrito (y_1 e y_2 son funciones PARE
Su anchura (o altura) pero $|y_1 - y_2| = y_1(x) - y_2(x)$

Entonces para el área $\frac{1}{2} A(x) = x (y_1(x) - y_2(x))$

$$\Rightarrow A(x) = 2x \left[4 - \frac{1}{3}x^2 - \left(\frac{1}{6}x^2 - 2 \right) \right] = 2x \left[6 - \frac{1}{2}x^2 \right]$$

$A'(x)$, $A'(x) = 12 - 3x^2$ de donde $A'(x) = 0$ en $x = 2$ (Posible Max y Min)

Para $A''(x) = -6x \Rightarrow A''(2) = -12 < 0$ en lo cual $x = 2$ es pto de Máx
y $A(2) = A_{\text{max}} = 16$

b) i) Definimos la función auxiliar $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por
 $h(x) = \frac{f(x)}{x}$ que es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b)

0.2) pues $f(x)$ y x lo son
Aplicando TVM a h en $[a, b]$, $\exists x_0 \in (a, b)$ t.q. $\frac{h(b) - h(a)}{b - a} = h'(x_0)$

0.5) Pero por hipótesis $h(b) = \frac{f(b)}{b} = \frac{f(a)}{a} = h(a) \Rightarrow h'(x_0) = 0$ y

0.3) como $h'(x_0) = \frac{x_0 f'(x_0) - f(x_0)}{x_0^2}$ en $x_0 \neq 0 \Rightarrow x_0 f'(x_0) = f(x_0)$ en $x_0 \in (a, b)$

ii) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x^{13} + 7x^3 - 5 \Rightarrow h'(x) = 13x^{12} + 21x^2 \Rightarrow$

0.8) $h''(x) = 12 \cdot 13 x^{11} + 42x$ donde $h'(0) = h''(0) = 0$ Pero $h'''(x) = 12 \cdot 13 \cdot 11 x^{10} + 42$

0.5) de donde $h'''(0) = 42 \neq 0 \Rightarrow x = 0$ es pto de inflexión (Derivada Imperfecta No Nula en 0)

iii) $F(x) = f(x) - f(a) \cos x - f(b) \sin x \Rightarrow F'(x) = f'(x) + f(a) \sin x - f(b) \cos x$

1.0) y $F''(x) = f''(x) + f(a) \cos x + f(b) \sin x$. Claramente F es dos veces derivable
pues f lo es y $F'(a) + F'(b) = f'(a) + f'(b) = 0$ (Por hipótesis)

Sea $H(x) = (F'(x))^2 + (F(x))^2 \Rightarrow H'(x) = 2F'(x)F''(x) + 2F(x)F'(x)$

0.5) $\Rightarrow H'(x) = 2F'(x)(F''(x) + F(x)) = 2F'(x) \cdot 0 = 0$. Entonces

0.5) $H'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow H(x) = k \rightarrow$ constante en $\mathbb{R}$, es decir
 $(F'(x))^2 + (F(x))^2 = k$ (Constante)

Cálculo Diferencial e Integral Control 2 (MA1002-2)

Prueba Problema 3

ii) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ derivable, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y $f'(x) + g(x)f(x) = 0$

0.1) Entonces $f(x) \in \mathbb{R}^+$, $f(x) \neq 0 \Rightarrow g(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)}$. Una primitiva de $g(x)$ es $\int g(x) dx$ de donde $\int g(x) dx = \int -\frac{f'(x)}{f(x)} dx = -\ln(f(x)) + C$

ii) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ derivable y $\int h(x) dx = h(x)$. Entonces $h(x)$ es

0.3) Primitiva de $h(x)$, es decir $h'(x) = h(x) \Rightarrow \frac{h'(x)}{h(x)} = 1 \quad h(x) \neq 0$

Usando lo anterior se tiene $\int \frac{h'(x)}{h(x)} = \int 1 \cdot dx = x + C$

0.4) y por lo tanto $\ln(h(x)) = x + C \Rightarrow \exp(\ln(h(x))) = \exp(x+C)$

0.2) $\Rightarrow h(x) = e^{x+C}$

b) i) $I = \int \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}} dx$ una sustitución puede ser $\left. \begin{array}{l} x = \sin^2(t) \\ dx = 2\sin t \cos t dt \end{array} \right\}$

$$I = \int \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{1-\sqrt{\sin^2 t}} \cdot 2\sin t \cos t dt = 2 \int \frac{\cos t \cdot \cancel{\cos t} \cdot \cos t}{1-\sin t} dt =$$

$$0.5) = 2 \int \frac{\sin t \cos^2 t}{1-\sin t} dt = 2 \int \frac{\sin t (1+\sin t)(1-\sin t)}{1-\sin t} dt$$

$$1.0) = 2 \int (\sin t + \sin^2 t) dt = 2 \int \left(\sin t + \frac{1}{2}(1-\cos 2t) \right) dt = -2\cos t + \left(t - \frac{1}{2}\sin 2t \right) dt$$

$$\Rightarrow I = -2\cos t + t + \frac{1}{2}\sin 2t + C \quad \left(\begin{array}{l} \text{NO ES NECESARIO volver} \\ \text{A variable ORIGINAL } dx \end{array} \right)$$

ii) $I = \int x \arctan x dx$. Por Partes $\left\{ \begin{array}{l} u = \arctan x \rightarrow du = \frac{1}{1+x^2} \\ dv = x dx \rightarrow v = \frac{1}{2}x^2 \end{array} \right.$

$$0.7) \Rightarrow I = \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \left[\int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} \right]$$

$$\text{Así } I = \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \arctan x + C$$

0.8)