MA1002-2 Cálculo Diferencial e Integral 2023, Verano
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Patricio Yáñez
Correo: pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 8: -SUMAS-ÁREA

- Considere la región o área plana

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

- **[Rotación eje OX - Método del disco]**

Dada la región R el volumen generado al hacer rotar R en torno al eje OX será:

$$V = \int_a^b A(x) = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Notar que esto viene a partir de sumar volúmenes de cilindros o discos de altura infinitesimalmente pequeña, cuya formula es

$$V_{cilindro} = \pi r^2 h$$

Donde cada disco tiene $r = f(x)$ y $h = dx$.

- **[Rotación eje OY - Método de la cáscara]** Dada la región R, le agregamos la restricción de que $0 \leq a < b$. El volumen generado al hacer rotar R en torno al eje OY será:

$$V = \int_a^b A(x) = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

Notar que esto viene a partir de sumar cilindros huecos, los cuales se calculan de la siguiente forma.

Dada el área sin tapas del cilindro, que se denomina área superficial de formula

$$A_{superficial} = 2\pi r h$$

Si la multiplicamos por una profundidad infinitesimal dx, obtendremos el volumen de un cilindro hueco. Notamos que r es la distancia del eje de giro hasta el cilindro hueco.

Por lo que reconocemos como $r = x$ (si el eje de giro es el eje OY) y $h = f(x)$.

P1. Considere la función $f(x) = x^2\sqrt{2 - \cos(x^5)}$ Determine el volumen de la región formada al rotar la región encerrada entre 0 y 2 y la recta $y = 0$.

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P2. Sea $V(b)$ el volumen del sólido obtenido al rotar con respecto al eje x la región contenida entre la curva $y = x^{-3}$ y el eje x, desde $x = 1$ hasta $x = b$.
Analice el comportamiento de $V(b)$ a medida que $b \to \infty$.

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P3. Sea $f(x) = 2x - x^2$, dada su región sobre el eje X, calcule su área, par5a luego colocar una recta desde el origen hasta la función, de tal manera que el área sobre y bajo la recta sea la misma.

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P4. Sea $\mathcal{D}$ la región del primer cuadrante limitada por la circunferencia de ecuación $(x-1)^2+y^2=5$ y la parábola de ecuación $y=2(x-1)^2$ (región bajo la circunferencia y sobre la parábola)

I Determine el área de la región $\mathcal{D}$

II Determine el volumen generado por sólido revolución en torno al eje OX.

III Determine el volumen generado por sólido revolución en torno al eje OY.

1) Intuición:

2) Teoría:

3) Matraca:

IV Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ con $f''(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$. Se define $G(x)=\displaystyle\int_x^{x+1}(x-t)f(t)dt$. Demuestre que $G''(x)<0, \forall x\in\mathbb{R}$.

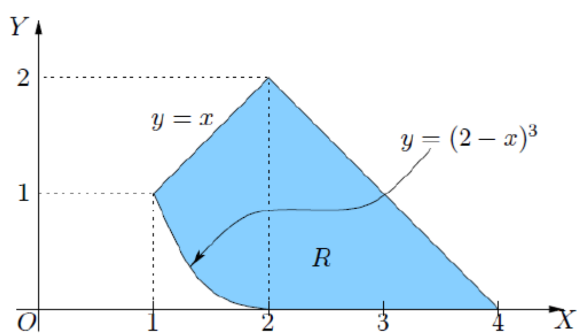
P5. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ con $f''(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$. Se define $G(x)=\displaystyle\int_x^{x+1}(x-t)f(t)dt$. Demuestre que

$$G''(x)<0, \forall x\in\mathbb{R}$$

. $(\overline{Propuesto})$

P6. *a*) Sea $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ tal que $f(0)=0$ y la longitud de la curva $y=f(x)$ entre 0 y x es igual a $x^2+2x-f(x)$. Determine $f(x)$.

b) Considere la región de la figura



Calcule el área del manto generado al rotar la figura en torno al eje x

P7. Dibuje las siguientes curvas considerando $r=r(\theta)$

a) $r=2$

b) $r^2-r-12=0$

c) $\theta=\dfrac{\pi}{6}$

d) $r=\dfrac{\theta}{2\pi}$

e) $r=tan(\theta)sec(\theta)$

f) $r=2cos(\theta)$

g) $r=sen(2\theta)$

h) $r=1+2sin(\theta)$

P8. *a*) Calcule el area que encierra la curva $\rho(\theta)=sen(2\theta)$.

b) Calcule el area encerrada entre las curvas $\rho_1(\theta)=sen(\theta)$ y $\rho_2(\theta)=1+cos(\theta)$

P9. Considere la curva definida en coordenadas polares por la relación $\rho = exp(-\theta)$ (espiral). Demuestre que el área polar encerrada por esta curva en la n-ésima vuelta, es decir donde $\theta \in [2(n-1)\pi, 2n\pi]$, es igual a $exp(-4(n-1)\pi)$-veces el área encerrada en la primera vuelta.

P10. [**Propuesto**] Se tiene una región fija de área A (generada a partir del área bajo la curva de una función f). Demuestre que el volumen de revolución en torno al eje OY y en torno al eje OX se calculan respectivamente como:

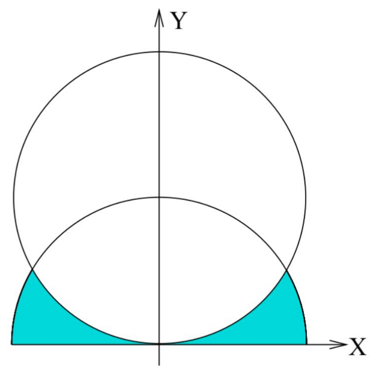
$$V_{OY} = 2\pi \cdot A \cdot X_G \qquad \text{y} \qquad V_{OX} = 2\pi \cdot A \cdot Y_G$$

Donde X_G y Y_G son las coordenadas del centro de masa de la región A

P11. [**Propuesto 2**] Para $r > 0$ se define la región $\mathcal{R}$ por:

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2,\ x^2 + y^2 - 2ry \geq 0,\ y \geq 0\}$$

Calcule la superficie del sólido engendrado al rotar la región $\mathcal{R}$ en torno al eje OX.



"No tengo frase, pero que les vaya bacan!"
Pato