MA1002-2 Cálculo Diferencial e Integral 2023 Verano
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Patricio Yáñez
correo: pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 7: TFC y repaso Riemann

13 de enero de 2023

P1. Se define $\forall n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^n(x)dx$$

Demostrar que $I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$, $\forall n \geq 2$

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P2. Sean u, v: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivables y f una función continua y sea $G(x) = \displaystyle\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt$.
Muestre que $G'(x) = f(u(x))u'(x) - f(v(x))v'(x)$

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P3. Demostrar que:

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}$$

No depende de x y Calcule su valor $\forall x > 0$

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P4. Estudia que ocurre con buena propiedad le entrega la paridad de una función para ser integrada, asumiendo que ya está bien definida, ¿Qué ocurre si la integro simétricamente?

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P5. Sea $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ una función no negativa y creciente.

I Usando la partición $P = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ pruebe que

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) \leq \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{i=1}^{n} f(i),\ \forall n \geq 2$$

II Considere $f(x) = ln(x)$ y utilice la parte anterior para demostrar que

$$(n-1)! \leq n^n e^{(-n+1)} \leq n!,\ \forall n \geq 1$$

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P6. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y no negativa en $[a,b]$. Pruebe que si $\int_a^b f(t)dt = 0$ entonces $f(t) = 0$, para todo $t \in [a,b]$

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

- Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable la función $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ es continua.
- **TFC 1:** Si f es una función continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y $a \in I$, entonces $\forall x \in int(I)$:
$$G(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow G'(x) = f(x)$$
- **Corolario del TFC 1:** Si la función F, continua en I es una primitiva cualquiera de f en I, entonces:
$$\forall a.b \in I, \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$
- **TFC 2:** Sea f integrable en (a,b) si existe una función tal que: $F' = f$ en (a,b), entonces:
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$
- **Integración por Partes:** Sean f y g dos funciones continuas en $[a,b]$ y con derivadas continuas en (a,b), entonces:
$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx$$
- **Integración por sustitución:** Sea g continua en $[a,b]$ y con derivada continua en (a,b). Sea f continua en $g([a,b])$, entonces:
$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$
- **Valor Medio:** Sea f una función integrable en el intervalo $[a,b]$. Se llama valor medio de f en $[a,b]$ a
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f$$
Se anota como $\overline{f}$ o $\langle f \rangle$.
- **TVM-integrales:** Si f es continua en $[a,b]$, entonces $\exists \xi(a,b)$ tal que $f(\xi) = \langle f \rangle$, es decir:
$$\int_a^b f = f(\xi)(b-a)$$
- **TVM Generalizado - integrales:** Si f es continua en $[a,b]$ y g es integrable en $[a,b]$, que no cambia de signo, entonces $\exists \xi(a,b)$ tal que
$$\int_a^b fg = f(\xi)\int_a^b g$$