

Cálculo Diferencial e Integral Control I (MA1002)

Prueba Problema 1

Considere $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\tan x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$

a) Demuestre que f es continuo en todo su dominio si $a=0$

En efecto, para $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\}$, x^2 , $\tan(x)$ son continuas

0.5 y por álgebra de continuas, $x^2/\tan(x)$ también lo es

En $x=0$ estudiamos $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\tan(x)} = f(0) = a$

1.0 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos x}{\sin x} = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} \cdot \frac{x \cos(x)}{1} = a \Leftrightarrow a = 0$

b) Calcule $f'(x)$ para cada $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\}$

1.5 $f'(x) = \left(\frac{x^2}{\tan(x)} \right)' = \frac{2x \tan(x) - x^2 \sec^2(x)}{\tan^2(x)} = \frac{2x}{\tan(x)} - \frac{x^2}{\sin^2(x)} = \frac{2x \cos(x)}{\sin x} - \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2$

(sin errores) Cualquiera de ellos

c) Determine $f'(0)$ usando la definición

Segun (a), $f(0) = a = 0$. Entonces, por definición.

1.5 $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2/\tan(h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\tan(h)} = 1$

Alternativamente $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan(x)} = 1$

d) Demuestre que $f(x)$ es continuo en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

En efecto, para $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\}$, $f'(x)$ es continuo por

0.3 álgebra de continuas (punto b))

Para $x=0$, calculamos $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2x \cos x}{\sin x} - \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 \right] = 2-1=1$

1.0 Es decir $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 1 = f'(0)$ y por lo tanto f' es continuo en 0

0.2 Sigue que $f(x)$ es continuo $\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Parte PROBLEMA 2 (MA1002)

a) Demuestre que la ecuación $2^{x-1} = 1 + (1-x)^2$ tiene al menos una solución en $[4, 6]$. Justifique.

Consideremos, por ejemplo, la función auxiliar $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 2^{x-1} - (1 + (1-x)^2)$ que es continua en $[4, 6] \subseteq \mathbb{R}$ por álgebra de continuas

0.5 (exponencial y polinomios)

además $g(4) = 2^3 - (1+9) = -2 < 0 \wedge g(6) = 2^5 - (1+25) = 6 > 0$

0.5 es decir $g(4) \cdot g(6) < 0$. Entonces por Teorema de Bolzano, o

TVI $\exists x_0 \in (4, 6)$ tal que $g(x_0) = 0 \Rightarrow 2^{x_0-1} = 1 + (1-x_0)^2$

0.5 es decir $x_0 \in [4, 6]$ es solución de la ecuación

b) Considere el polinomio $p(x) = x^5 + 2x - 7$. Demuestre que $\exists c \in \mathbb{R}$ tal que $p(c) = \pi$

0.2 En efecto, se sabe que el polinomio $p(x)$ es continuo en $\mathbb{R}$
además, por ejemplo, $p(1) = 1 + 2 - 7 = -4$ y $p(2) = 32 + 4 - 7 = 29$

0.3 y claramente $\pi = 3.1415$ con lo cual $-4 < \pi < 29$, es

0.5 decir $f(1) < \pi < f(2)$, entonces por TVI $\exists c \in [1, 2]$, $p(c) = \pi$

c) Considere la familia de polinomios $g_n(x) = x^n + x - 1$

i) Demuestre que $\forall n \geq 1$, $g_n(x)$ tiene una raíz π_n positiva

0.2 En efecto, $g_n(x)$ es un polinomio $\forall n \geq 1$ y por lo tanto es continuo en $\mathbb{R}$

0.3 además $g_n(0) = -1 \wedge g_n(1) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, es decir $g_n(0) \cdot g_n(1) < 0$. Así

0.5 Por Bolzano (o TVI), $\exists \pi_n \in (0, 1)$ ($\pi_n > 0$) tal que $g_n(\pi_n) = 0$

0.5 ii) como cada $\pi_n \in (0, 1)$ es raíz de $g_n(x)$, la sucesión $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada ($\pi_n \in [0, 1] \subseteq [0, 2]$) y por lo tanto admite una subsecuencia CONVERGENTE.

P20TA PROBLEMA 3

a) Calcular las derivadas de las funciones.

(1.0) i) $f(x) = \arctg(\tan x)$; $f'(x) = \frac{\tan x}{1 + \tan^2 x}$

(1.0) ii) $g(x) = \frac{\tan(x) - 1}{\sec(x)}$; $g'(x) = \frac{\sec^2 x \cdot \sec(x) - (\tan(x) - 1) \cdot \sec(x) \tan(x)}{\sec^2(x)}$

(1.0) iii) $h(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$; $h'(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \cdot \frac{e^x(e^x + 1) - (e^x - 1)e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{e^{2x} - 1}$

(OBSERVACION: 1.0 ptos cada derivada SIN ERROR)

b) Se definen $p(x)$ y $f(x)$ por:

$$p(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \text{ distintos}$$

$$f(x) = \frac{1}{x - a_1} + \frac{1}{x - a_2} + \cdots + \frac{1}{x - a_n}$$

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid p(x) \neq 0\}$$

1) Probar que $\forall x \in A$, se tiene $f'(x) < 0$.

(0.2) En efecto, $f'(x) = \left(\frac{1}{x - a_1}\right)' + \left(\frac{1}{x - a_2}\right)' + \cdots + \left(\frac{1}{x - a_n}\right)'$

(0.8) $\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{(x - a_1)^2} - \frac{1}{(x - a_2)^2} - \cdots - \frac{1}{(x - a_n)^2} = -\sum_{k=1}^n \frac{1}{(x - a_k)^2} < 0$

2) Probar que $\forall x \in A$, $\frac{p'(x)}{p(x)} = f(x)$ y que $\frac{d}{dx}\left(\frac{p'(x)}{p(x)}\right) < 0$

En efecto, sea $p(x) = \exp(\ln(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n))$, entonces

(0.5) $p'(x) = \underbrace{\exp(\ln(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n))}_{p(x)} \cdot [\ln(x - a_1) + \ln(x - a_2) + \cdots + \ln(x - a_n)]'$

(1.0) $\Rightarrow p'(x) = p(x) \left(\frac{1}{x - a_1} + \frac{1}{x - a_2} + \cdots + \frac{1}{x - a_n} \right) = p(x) \cdot f(x) \quad / : p(x)$

(0.5) Así $\frac{p'(x)}{p(x)} = f(x)$ y por lo tanto $\frac{d}{dx}\left(\frac{p'(x)}{p(x)}\right) = f'(x) < 0$