

DEFINICIÓN (DEFINICIÓN DE EXPONENTE IRRACIONAL) Para todo $a \in (0, \infty)$ y $n \in \mathbb{N}$ las expresiones a^n , a^{-n} y $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ tienen un significado. Ahora, vamos a extender esta definición para a^α , con $\alpha \in \mathbb{R}$. Sean $a \in (0, \infty)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Se define a^α como:

$$a^\alpha := \exp(\alpha \ln a).$$

Observación: (**Consistencia**)

Como $\exp(n \ln(a)) = (\exp(\ln(a)))^n = a^n$ y $\exp\left(\frac{\ln(a)}{n}\right) = (\exp(\ln(a)))^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}$, la definición extiende a $\mathbb{R}$ el significado que habíamos asignado anteriormente a a^α .

Propiedades 10. Las siguientes propiedades son consecuencia directa de la definición de a^α .

1. $\forall a \in (0, \infty), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ln(a^\alpha) = \alpha \ln(a).$
2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, a^{\alpha+\beta} = a^\alpha a^\beta.$
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, (a^\alpha)^{-1} = a^{-\alpha}.$
4. $\forall \alpha, x \in \mathbb{R}, (\exp(x))^\alpha = \exp(\alpha x),$ en particular $\exp(\alpha) = e^\alpha.$
5. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}.$

Figura 1: Propiedad consistencia

b) Matraca: a)

- 1) Calcular el límite por definición ocupando las propiedades que predefine el ejercicio.
 - 2) Armar a la fuerza el producto de funciones que pide la derivada enésima, y expresar la expresión de forma bruta.
- b) Una vez que hago la propiedad, que puedo notar al aplicar las propiedades de logaritmo? Si llego a una expresión gané porque ya existe, luego me basta estudiar el signo.

c) Teoría: a)

- 1) ¿Por qué? existe la derivada? sería algo que debo justificar a priori, ocupe la hipótesis?
- 2) Si una de mis funciones es polinómica, a quien le coloco el coeficiente (k), además recordemos que para usar la fórmula de Leibnitz, debo cumplir todas las hipótesis que están explícitas en el resumen!

b)

El logaritmo debe estar bien definido, y cuando a un límite de cierta forma, debo cumplir ciertas hipótesis para poder hacer un desarrollo que rima con hospital.

P3. [Taylor derivado] $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos veces derivable, tal que $f(x) + f''(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Pruebe que es n veces derivable, y que si sabemos de antemano $f(0) = f'(0) = 0$ debe ser la función nula.

a) Intuición: Me dan una EDO, donde yo quiero saber como se comporta, luego entonces me conviene ver cuanto me da la tercera derivada, y la cuarta, y la quinta, ¿qué pasó?, se repite? entonces que puedo concluir? Luego de descubrir que es n -veces derivable, me están dando la evaluación de la función en un punto y de su derivada, entonces tengo unas ecuaciones de las derivadas en un punto en particular, me está dando un orden, y un punto en el cual le puedo realizar su expresión de Taylor que me será de ayuda!

Luego para ver que la función es nula, como podemos llegar a un valor fijo de una función? qué ocurre si la acoto inferior y superiormente por la constante? a donde le queda ir a la función?.

b) Matraca: Expresar de manera explícita la expansión de Taylor de la función, además de la parte anterior calcular las derivadas, pero notar que la matraca reside en la definición y ocupar las propiedades que nos definen en el enunciado (la única ecuación)

c) Teoría: La teoría en este ejercicio, es ver que estén bien definidas las derivadas, y el por qué?. Para expresar el polinomio de Taylor este posee una hipótesis matemática que debe ser cumplida,

luego también para usar el Teorema del Sándwich para terminar el ejercicio, debo cumplir la hipótesis correspondiente.

Además debo encontrar una cota para la función que no tenga dependencia del orden de la derivada que estoy haciendo, porque de lo contrario no estaremos demostrando nada!

Propuestos

1. A desarrollar:

Estudiar completamente la función definida por

$$f(x) = x + 1 - \frac{2}{x} - \frac{3\ln(x)}{x}$$

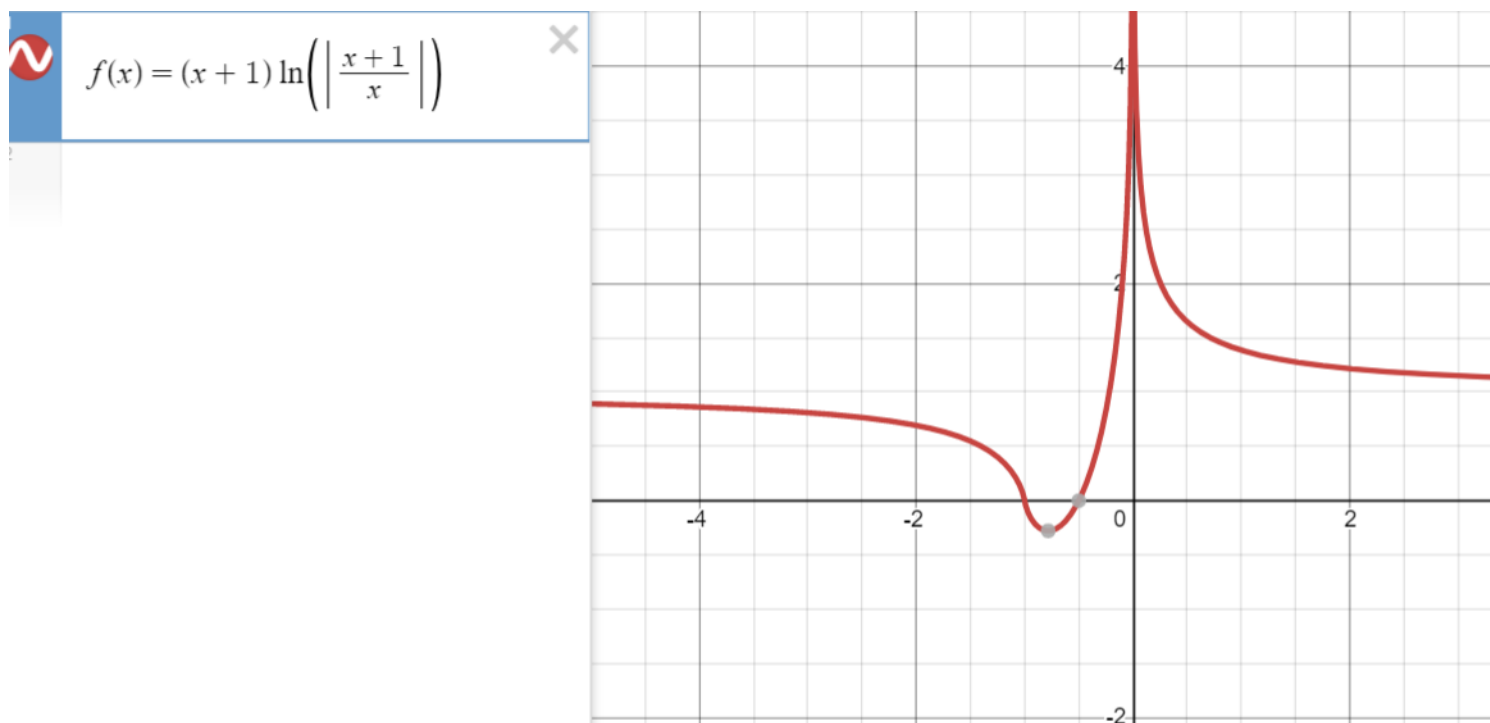


Figura 2: Gráfico para comprobar desarrollo.

2. A desarrollar x2

Considere la función $f(x) = (x+1)\ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right)$, definida en $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$

- Encuentre ceros y signos de f
- Estudie las asíntotas horizontales de f . Encuentre los límites laterales cuando $x \rightarrow 0^\pm$ y $x \rightarrow -1^\pm$ y ya sea, repare la función para que sea continua, o bien, detecte si hay asíntotas verticales.
- Use el teorema de valor medio en la función auxiliar $g(x) = \ln(|x|)$ en el intervalo $[x, x+1]$ para probar que

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{1}{x}, \quad \forall x \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$$

- d) Calcule la primera derivada de f . Use el resultado de la parte anterior para concluir sobre el crecimiento de f en $(-\infty, -1)$ y en $(0, \infty)$
- e) Calcule $f''(x)$ e indique los intervalos donde f es cóncava y donde es convexa
- f) Estudie los límites de $f'(x)$ cuando $x \rightarrow -1^+$ y cuando $x \rightarrow 0^-$. Usando el signo de la segunda derivada en $(-1, 0)$ concluya sobre la monotonía de f' en dicho intervalo y pruebe que existe un único punto donde $f'(x) = 0$. Bosqueje el gráfico de f

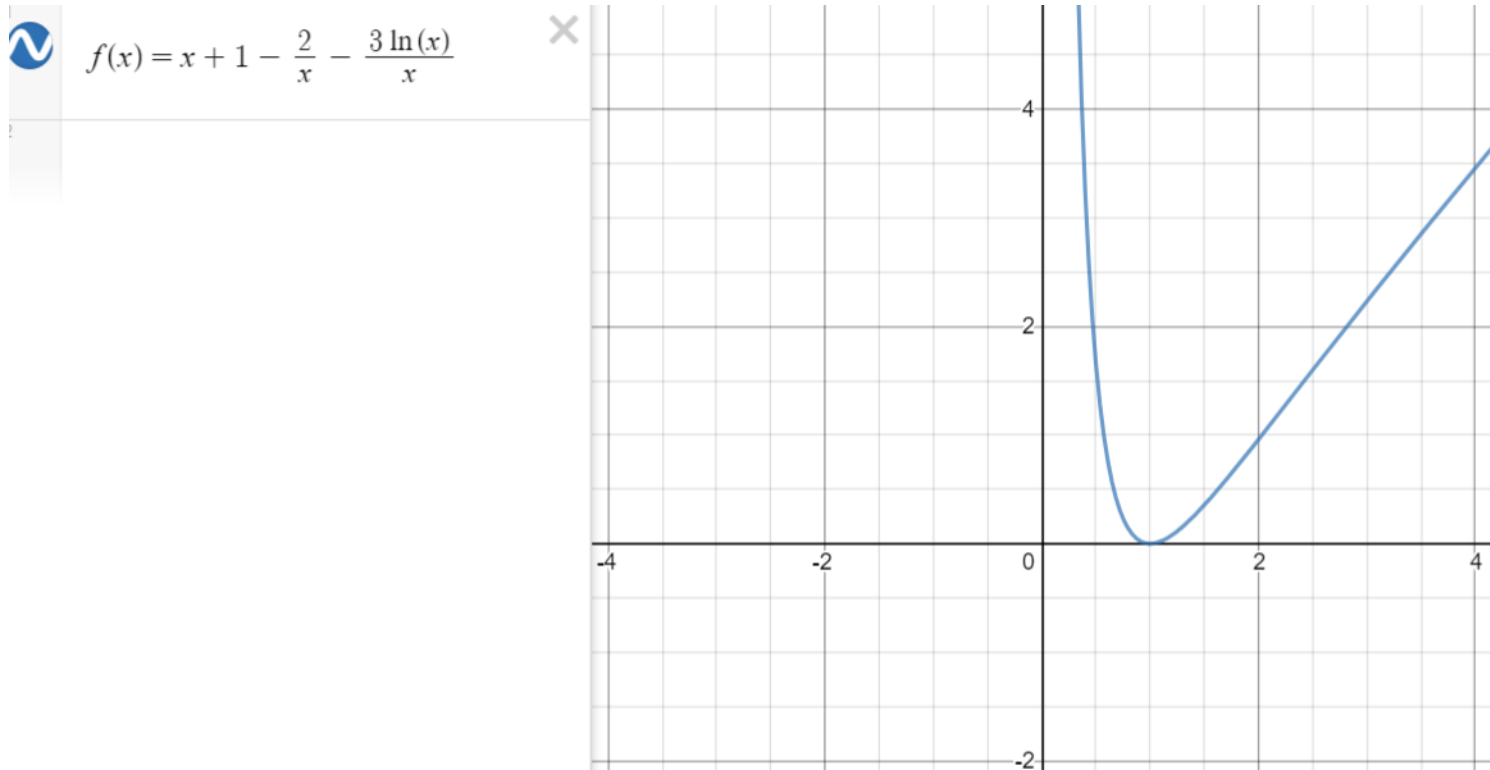


Figura 3: Gráfico para comprobar desarrollo.

“It is not the task of the University to offer what society asks for, but to give what society needs.”
Edsger W. Dijkstra

1) Sea función $f(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$



fcfm

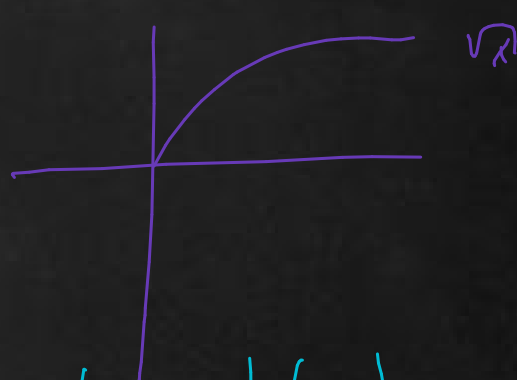
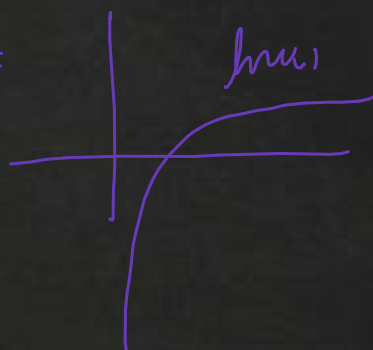
Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

~~$y = x^2 + 5 \Rightarrow \sqrt{y-5} = x$~~
 ~~$\Rightarrow y = \sqrt{x-5}$~~
 ~~$x \geq 5$~~

Domnio, Ceros, crecimiento, puntos críticos, asíntotas, pnto inflexión,
Convergencia, gráfico, Taylor.

$f(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

#



(1) $\ln(x)$ bien definida
 $x > 0$

(2) $\sqrt{x}$ bien definida
 $x > 0$

(3) $\sqrt{x} \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$

(1) $\cap$ (2) $\cap$ (3) $\Rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R}^+$

$$M(f) = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

$$Z(f) := \{x \in \text{Dom}(f) \mid f(x) = 0\}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow \ln(x) = 0 \quad / e^x$$

$$\Rightarrow x = 1$$

$$Z(f) = \{1\}$$

Crecimiento



Calcularemos

$$\left(\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \right)'$$

$$\# \left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Sabemos que $\ln(x)$ y $\sqrt{x}$ derivables en $\mathbb{R}^+$
 $\Rightarrow$ por algebra y composicion su cociente lo es tambien
 $\Rightarrow$ continua sobre el cociente $\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ en $\mathbb{R}^+$

$$\left(\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \right)' = \frac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - \ln(x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$= \frac{2 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \sqrt{x} - \ln(x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{x}}{x}$$

$$= \frac{2(\sqrt{x}) - \ln(x)(\sqrt{x})}{2x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2 - \ln(x)}{2x^{3/2}}, \text{ si}$$

quedo signos Hay tabla



$$\# (\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\downarrow \text{def} \quad (x^{1/2})' = \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2}$$

$$f'(x) = \frac{2 - \ln(x)}{-\infty x^{3/2}}$$

$$2 - \ln(x) = 0 \\ 2 = \ln(x) \quad / e^x \\ \boxed{e^2 = x}$$

$-\infty$	$x^{3/2}$	0	e^2	$+\infty$
$2 - \ln(x)$	$2x^{3/2}$			
		+	-	
		+	+	
		+	-	

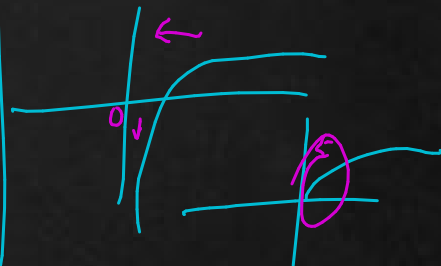
$$f'(x) \geq 0 \quad \text{si} \quad x \in (0, e^2] \Rightarrow f(x) \text{ creciente si } x \in (0, e^2]$$

$$f'(x) \leq 0 \quad \text{si} \quad x \in (e^2, \infty) \Rightarrow f(x) \text{ decreciente si } x \in (e^2, \infty)$$

L'Hopital límites $\frac{\infty}{\infty} \wedge \frac{0}{0}$

$$\Rightarrow \lim f \cdot g = e^{\lim g \cdot \ln f}$$

$$f - g = \frac{f}{\frac{1}{g}} = \frac{f}{\frac{g+f}{gf}}$$



Asintotas vertical $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = -\infty$

Asintotas horizontal

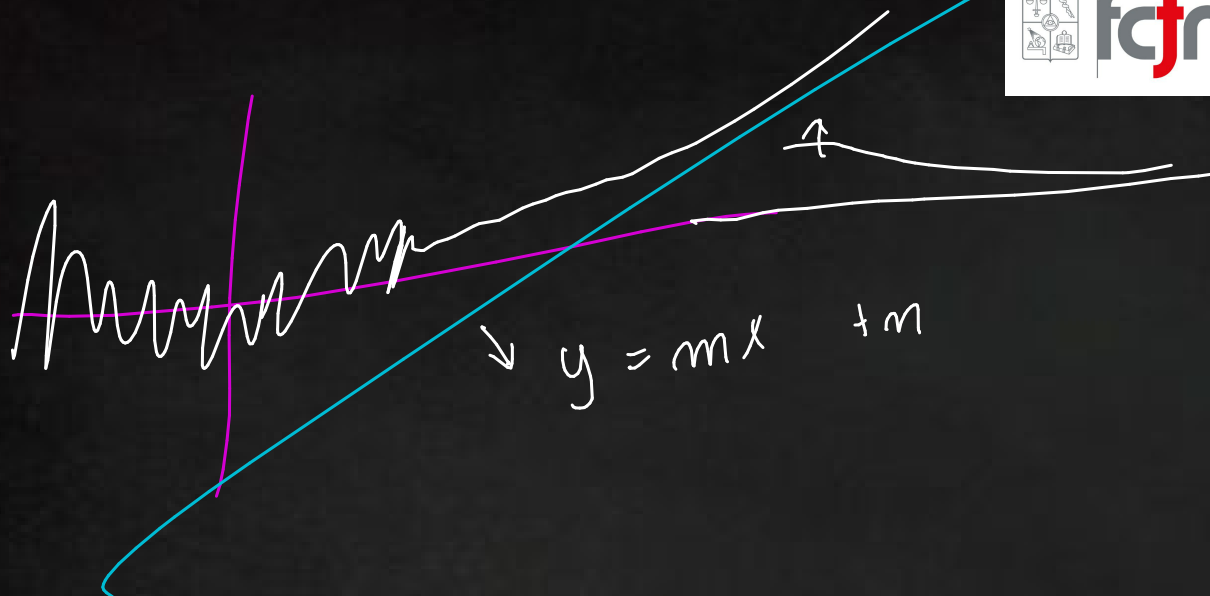
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Abuso de L'H

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = 0 //$$



Asintota oblicua



Punto crítico $x=0$

$$f'(x) = \left(\frac{2 - \ln(x)}{2x^{3/2}} \right)' = \frac{(2 - \ln(x))' 2x^{3/2} - (2 - \ln(x)) (2x^{3/2})'}{4x^3}$$

$$= -\frac{1}{x} \cdot \frac{2x^{3/2}}{4x^3} + \frac{(-2 + \ln(x)) 2 \cdot \frac{3}{2} x^{1/2}}{4x^3}$$

$$= \frac{-2x^{1/2} - 6x^{1/2} + 3\ln(x)x^{1/2}}{4x^3}$$

$$f''(x) = \frac{-8 + 3\ln(x)}{4x^{5/2}}$$

TABLA

↑ → Com

$-8 + 3\ln(x)$	$-\infty$	0	$e^{8/3}$	$+\infty$
$4x^{5/2}$		-	+	+
		+	+	+

verdad.

$$\begin{aligned}
 -8 + 3\ln(x) &= 0 \\
 \ln(x) &= \frac{8}{3} \\
 x &= e^{8/3}
 \end{aligned}$$

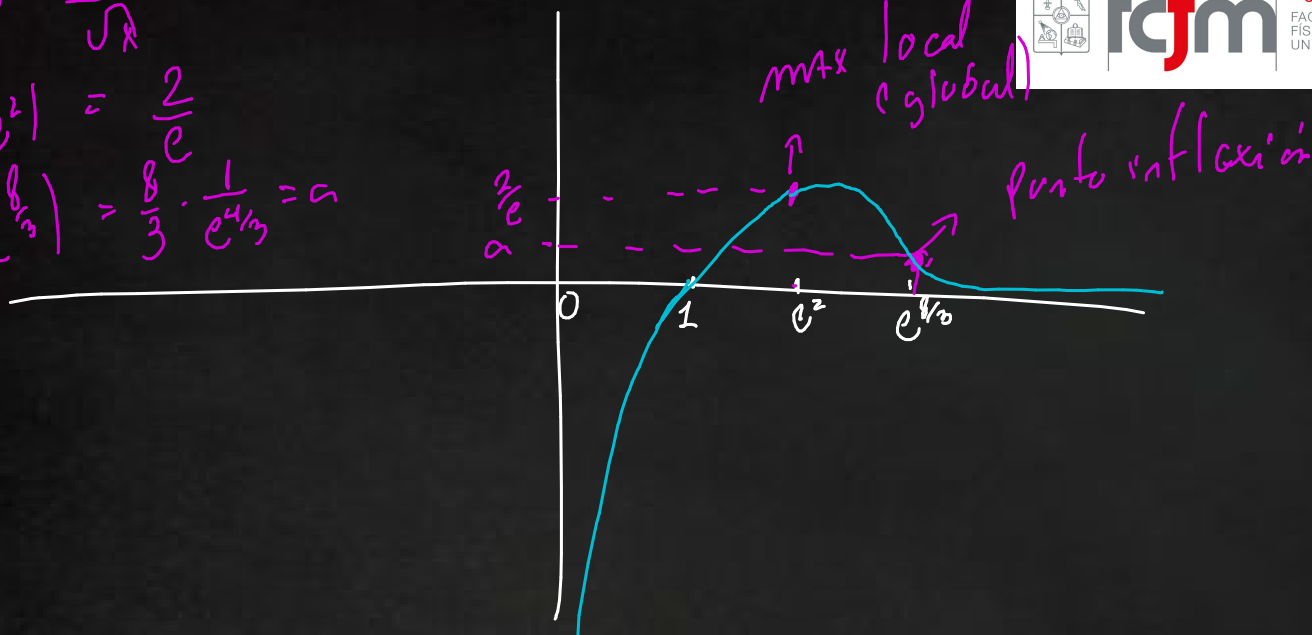


$$\begin{aligned}
 f''(x) &\leq 0 \quad \text{si } x \in (0, e^{8/3}) \\
 f''(x) &\geq 0 \quad \text{si } x \in [e^{8/3}, +\infty)
 \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

$$f(e^2) = \frac{2}{e}$$

$$f(e^{8/3}) = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{e^{4/3}} = \frac{2}{e}$$



$$f(x) = 0 \quad x = 1$$

f creciente $x \in (0, e^2)$

f decreciente $x \in (e^2, \infty)$

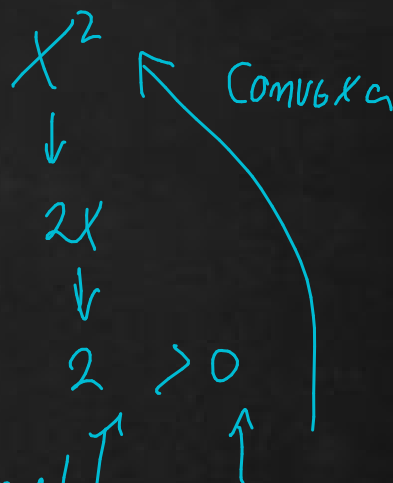
f cóncava $x \in (0, e^{8/3})$

f convexa $x \in (e^{8/3}, \infty)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$f < 0$ si $x \in (0, 1)$
 $f > 0$ si $x \in (1, \infty)$



a) f, g derivable tal que.

1) $g(x) = x f(x) + 1$

2) $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad g(x+y) = g(x) g(y)$

3) $f(0) = 1$

Pd q $g'(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$; lo primero que nos dice la intuición

Es tomar 1) $g(x) = x f(x) + 1 \quad \left| \frac{d}{dx} \right.$

$\Rightarrow g'(x) = f(x) + x f'(x) \stackrel{?}{=} x f(x) + 1$

En realidad no tenemos la información necesaria. Por lo que el otro método que podemos explotar es definición.

$\frac{dg(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} ; \quad \forall x$ arbitrario. En dom

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) g(h) - g(x)}{h} \quad 2)$

$= g(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - 1}{h} \stackrel{\text{definición}}{=} g(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h f(h) + 1 - 1}{h} = g(x) \lim_{h \rightarrow 0} f(h) \stackrel{3)}{=} g(x) \cdot 1 = g(x)$

PDQ $\forall m \geq 1, g(x) = x f^{(m)}(x) + m f^{(m-1)}(x)$ y
 calcule $f^{(m)}(0)$

Veamos primero lo siguiente

$$g(x) = x f(x) + 1 \quad / \quad (1)'$$

$$g'(x) = (x f(x))' \quad / \quad (1)''$$

$$g''(x) = (x f(x))'' \quad / \quad \vdots$$

$$g^{(m)}(x) = (x f(x))^{(m)}$$

Fórmula de Leibniz, Sean f, g derivables de orden (n)

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a)$$

$$(x f(x))^{(m)} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^{(k)} f^{(m-k)}(x)$$

$$= \binom{m}{0} x^{(0)} f^{(m-0)} + \binom{m}{1} x^{(1)} f^{(m-1)} + \binom{m}{2} x^{(2)} f^{(m-2)} + \dots + \binom{m}{m} x^{(m)} f^{(m-m)}$$

$$+ \dots + \binom{m}{m} x^{(m)} f^{(m-m)}$$

$\rightarrow 0 + 0 + \dots + 0$
 $\downarrow$
 m -ésimo

$$= \frac{m!}{0!m!} \times f(x)^{(m)} + \frac{m!}{1!(m-1)!} \cdot 1 \cdot f(x)^{(m-1)}$$

$$= x f(x)^{(m)} + m f(x)^{(m-1)} // = g^{(m)}(x) \quad \star$$

Después $g^{(m)}(x) = g(x)$ 

En efecto por inducción.

CB $g^{(0)}(x) = g(x)$ ✓

HIP $g^{(m-1)}(x) = g(x)$

Paso Inductivo $g^{(m)}(x) = g(x)$ P.D.Q.

$$g^{(m)}(x) = [g^{(m-1)}(x)]' = g'(x) = g(x) \quad \square$$

$$\Rightarrow g(x) = g^{(m)}(x) = x f(x)^{(m)} + m f(x)^{(m-1)}$$

$x=0$

$$g(0) = 0 \cdot f(0)^{(m)} + 1 = 0 \cdot f(0)^{(m)} + m f(0)^{(m-1)}$$

$$\frac{1}{m} = f^{(m-1)}(0) \quad , \forall m \in \mathbb{N}$$

$m = m' + 1 \Rightarrow \frac{1}{m+1} = f^{(m)}(0) \quad , \forall m' \in \mathbb{N}$

b) Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable tal que $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Demuestre

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+\delta)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{\delta}}$$

Existe, es positivo y calcúlo.

Sea $y = \left(\frac{f(x+\delta)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{\delta}} ; f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
 $f(x+\delta) > 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{f(x+\delta)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{\delta}} = y > 0 \quad / \ln(x)$$

constante respecto δ

$$\frac{\ln(f(x+\delta)) - \ln(f(x))}{\delta} = \ln(y) \quad / \lim_{\delta \rightarrow 0}$$

puedo usar L'Hopital
 luego los límites
 están bien definidos
 por ser diferenciable
 y es $\frac{0}{0}$.

$$\Rightarrow \stackrel{LH}{=} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\frac{f'(x+\delta) \cdot \delta}{f(x+\delta)} - 0}{1} = \ln(y)$$

$$= \frac{f'(x) \cdot x}{f(x)} = \ln(y) \quad / e^x$$

$$e^{\frac{f'(x) \cdot x}{f(x)}} = y > 0 ; \text{ existe y positivo! } \forall x \in \mathbb{R}.$$

P1 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos veces derivable tal que
 $f(x) + f''(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

a) Mostrar que es n veces derivable

b) si sabemos $f(0) = f'(0) = 0$, pruebe que
 debe ser la función nula, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.

$$f'''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x+h) - f''(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-f(x+h) + f(x)}{h}$$

$$= - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -f'(x) \quad \text{por lo que } f'''(x) \text{ existe. } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f^{(iv)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'''(x+h) - f'''(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-f'(x+h) + f'(x)}{h}$$

$$= - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = -f''(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$= f(x) //$$

Notemos que $f^{(n)}(x) \in \{f(x), f'(x), -f(x), -f'(x)\}$

El conjunto $\mathbb{N}$ lo puedo particionar

$$\text{En } A \begin{cases} x \equiv 0 \pmod{4} \\ x \equiv 1 \pmod{4} \\ x \equiv 2 \pmod{4} \\ x \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

luego como A es una partición de $\mathbb{N}$, a través

del principio de inducción se tendrá //

tenemos derivable $\Rightarrow$ Implica diferenciable
 $\Leftrightarrow$ Equivale en $\mathbb{R}$.

luego derivable $\Rightarrow$ continua. por lo que f y f'
serán continuas, así $f^{(n)}$ $\Rightarrow$ será continua $\forall n \in \mathbb{N}$.
 $\downarrow$
Existe y además esa derivada

Con lo que se concluye $C^\infty(\mathbb{R}) //$

Vemos $f(0) = f'(0) = 0$ ①

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$

$f(x) = T_f^K(x-\bar{x}) + \frac{f^{(K+1)}(\xi)}{(K+1)!} (x-\bar{x})^{K+1}$

Esto es el otro $\theta(x)$ en desarrollo de Taylor; haciendo su Expansión de Taylor en $[-x, x]$ en torno a 0

$\Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} x^{m+1}; \xi \in [-x, x]$

Por ① $f(0) = f'(0) = 0$; si go derivando una constante $f^{(m)}(0) = 0 \forall m \in \mathbb{N}$.

Entonces $f(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} x^{m+1}$ Cauchy-Schwarz

$|f(x)| \leq \frac{|f^{(m+1)}(\xi)|}{(m+1)!} |x|^{m+1}$

↙ siempre estará acotado por lo más positivo que pueda ser y lo más negativo.

Como $\xi \in [-x, x]$ cerrado y acotado y $f^{(m+1)}$ es continua por $C^{\infty}(\mathbb{R})$, por Weierstrass alcanza su máximo y mínimo, por lo que está acotada.

$$\Rightarrow |f^{(m+1)}(\xi)| \leq M_{(m+1)} ; \text{ por recordemos}$$

$$|f^{(m+1)}(\xi)| \in \{|f(\xi)|, |f'(\xi)|\} ; \text{ entonces puedo}$$

Caracterizar $M_{(m+1)} = \max \{|f(\xi)|, |f'(\xi)|\}$
 una constante que no depende de m .

$$\Rightarrow |f(x)| \leq \frac{|x|^{(m+1)}}{(m+1)!} M, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$$

tomando límite $m \rightarrow \infty$

$$0 \leq f(x) \leq 0 \Rightarrow f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}. \quad \text{Sandwich.}$$

- a) Para este tipo de ejercicios primero notaremos que existen una serie de ejercicios de diferentes tipos, por lo que habrá que saber que hacer en cada caso.

Siempre que tenga algo del tipo $\cos(x)^n$ $n \in \mathbb{N}; n > 2$ ó $\sin(x)^n$ $n \in \mathbb{N}$ lo que primero debemos pensar es en ver como poder escribir esto de manera conveniente para que sea más fácil poder integrarlo, en su defecto ocupar la propiedad pitagórica fundamental del $\sin(x) \wedge \cos(x) \rightarrow \cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$ de manera conveniente.

Luego notar que mediante un cambio de variable de la forma $u = \sin(x)$ o similar se puede pasar de estas expresiones trigonométricas a polinomios, lo cual es mucho más práctico.

¿Qué ocurre con el dx o du que queda? siempre debo considerarlo y debe ser conveniente que mi cambio de variable lo tenga contemplado y así no debo ir añadiendo términos adicionales.

Estudiar de manera adicional como integrar $\int \cos(x)^5 \sin(x) dx$ vemos que el dx con el cambio de variable anteriormente mencionado es directo!

- b) Lo que hay que pensar aquí es el cambio para poder eliminar esa traslación de la raíz, que es la que más me molesta!
- c) Ver la forma de eliminar la $\sqrt[5]{x}$ entonces un cambio con una potencia 5 sería una buena forma de abarcarlo. Luego de esto sería conveniente que mi derivada esté en el numerador y su primitiva en el denominador eh?
- d) simplificar es la mejor idea, luego de esto ver en realidad que cambio me sirve, pues su coloco un cambio con exponentes $3x$ tendré que tener exponentes feos para expresar e^{2x} , por lo que, cual será conveniente?
- e) Suma de cuadrados en el denominador! el apunte lo recomienda en el capítulo 5[Página 62]! lo usual será pensar en $x = a \tan(u) \vee x = a \sinh(u)$
- f) Cuadrado de binomio puede ser una muy buen intuición o completación de cuadrado para cuando me salga un polinomio de grado par no factorizable a la primera!
- Además luego deshacerse de su traslación en el eje $\mathcal{X}$ con algo del estilo de $x + 1 = u$

- b) Teoría: La teoría detrás de este tipo de ejercicios es lo esencial de primitivas, que si se tienen dos primitivas de una función, difieren en una constante, la cual por cada integral indefinida me entrega una!

Está bien definido el cambio de variable, pues si! es un cambio biyectivo que permite calcular integrales elaboradas convirtiendo el desarrollo en general a las ya demostradas.

- c) Matraca: Hay que darle mucho para adelante, uno se demora en poder interiorizar en un comienzo el que cambios hacer, y los desarrollos se vuelven algo extensos, pero en su defecto a medida que la matraca aumente esto irá mejorando de forma paulatina! Darle para adelante porque el álgebra acá y escribir las cosas de manera conveniente será fundamental.

P2. Resuelva usando integración por partes

a) $\int x^2 e^x dx$

b) $\int \cos(\ln(x)) dx$

- a) Intuición: La intuición de este tipo de ejercicios es que debemos identificar que tenemos la integral de dos tipos de funciones diferentes multiplicadas, las que se pueden resumir en lo siguiente.

$$\{e^x, \sinh(x)/\cosh(x), \sin(x)/\cos(x), ax^n + bx^{n-1} + \dots + zx^2 + zx, \ln(x), \arccos(x)/\arcsen\}$$

Que se resume de la siguiente manera nemotécnica con ILATHE.(ojo que está al revés con cada inicio de palabra [exponenciales, hiperbólicas, trigonométricas, algebraicas, logaritmo e inversas trigonométricas])

Pero antes de aprenderse cosas por mecánica es pensar ¿Cuál es más fácil para derivar? Esta se define como u y se calcula du .

¿Cuál es más fácil para integrar? Esta se define como dv y se calcula v .

Luego para la b) tenemos un logaritmo, de que manera lo puedo eliminar? su inversa en el cambio de variable puede ser una buena idea! y al derivar $u = e^x$ me da lo mismo ajajaj Spiderman? ahora es un producto de funciones iguales o diferentes? La intuición era eliminar el logaritmo dentro de la composición.

- b) Teoría: La teoría a través de este ejercicio es que con secuencia de integrar productos es consecuencia de la derivada del producto y su demostración vista en clase auxiliar y el apunte.
- c) Matraca: Puede que el desarrollo sea extenso, o bien salga otra vaca dentro de la vaca, y es cierto, si tengo un polinomio tendré que reiterar el proceso en el orden de ± 1 vez de acorde al grado del polinomio, es decir, si es de grado 4 puede que debo hacer el proceso de integración por parte sus 3, 4 o 5 veces. [La cantidad de vacas necesarias para salvar la compañía].

P3. Generalización Integración por partes Este ejercicio busca que busquemos un método de hacer integración por partes, pero sin importar la cantidad de veces que deba iterar el proceso. En este caso ¿Cómo puedo escribirlo? (Propuesto)

- a) Intuición: Querer generalizar la integración por parte en un método que sea más práctico!
- b) Teoría: Mientras la función esté bien definida podré hacer la cantidad de vacas necesarias para poder calcular la integral!
- c) Matraca: Hacer varias y ver como se comporta, siempre pensar en ordenarlo de manera que se parezca y sacar un patrón.

P4. Resuelva usando fracciones parciales

a) $\int \frac{dx}{1-x^2}$

b) $\int \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2(x^2+1)} dx$

- a) Intuición: En este tipo de ejercicios lo primero es ver que nos entregarán fracciones a integrar que serán en cierto sentido factorizables con algo de forma minimal, por lo que el saber armar fracciones parciales es esencial, si tienen dudas el apunte lo explica de manera buena. De lo contrario ver esto

Como podrás ver, en general, para integrar una función de la forma:

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx = \int \frac{P_n(x)}{(a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \cdots (a_mx + b_m)} dx$$

donde $Q_m(x)$ es un polinomio de grado m que es factorizable en m factores lineales que no se repiten, buscamos números $A_1, A_2, \dots, A_m$ tales que:

$$\frac{P_n(x)}{(a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \cdots (a_mx + b_m)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_m}{a_mx + b_m}$$

Para el caso en que uno o varios de los factores se repitan usamos un término para cada uno de los factores con exponentes $1, 2, \dots, k$, donde k es el número de veces que se repite el factor que estamos considerando. Por ejemplo, para expresar:

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B_1}{x+2} + \frac{B_2}{(x+2)^2} + \frac{B_3}{(x+2)^3}$$

En este caso $k = 3$, por eso usamos 3 términos para expresar en fracciones parciales. Este mismo argumento aplica a los denominadores que se factorizan con polinomios cuadráticos. Cuando un denominador es cuadrático, en el numerador escribiremos: $Ax + B$. Por ejemplo:

$$\frac{2x+1}{(x-7)(x^2+11)} = \frac{A}{x-7} + \frac{Bx+C}{x^2+11}$$

Observa que el grado del polinomio que escribimos en el numerador siempre es menor al grado del denominador en una fracción. Para el caso de factores cuadráticos repetidos, tenemos:

$$\frac{2x+1}{(x-7)(x^2+11)} = \frac{A}{x-7} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+11} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+11)^2}$$

Con estos trucos, puedes calcular muchas integrales usando este método.

Figura 1: Parciales como en sumatorias telescópicas

- b) Teoría: Es que este cambio es equivalente, por lo que la suma integral a calcular será la pedida, recordar que la integral es transformación lineal (saca escalares y además separa la suma). Por lo general hace más abordable el ejercicio.
- c) Matraca: Darle para adelante pues quedan corchos grandes, pero no imposibles, así que matraquear y apurarla acá es primordial.

P5. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ derivable y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua tales que

$$f'(x) + g(x)f(x) = 0$$

Usando definición de primitiva muestre que

$$\int g(x)dx = -\ln f(x) + C$$

- a) Intuición: Primero me piden demostrar algo con un $\ln(x)$ recordemos la definición de primitiva, y además cual la derivada de esta, y su integral, será esta función la que estoy trabajando? Eso es un comienzo.
Me dan una igualdad, me puede ser conveniente el matraquearla y llegar a lo pedido.
- b) Teoría: Las funciones deben estar bien definidas, no se debe anular una en particular, y deben ser integrables y derivables respectivamente.

c) Matraca: Ordenar lo que me dan sin matar gatitos, en realidad no es mucha.

P6. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ derivable y tal que $\int f(x)dx = f(x)$

a) Muestre que $\frac{f'(x)}{f(x)} = 1$ y deduzca que $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = x + C$

b) Concluya que $f(x) = e^{x+C}$

a) Intuición: ¿Quien es Spiderman? ¿Dos primitivas de la misma función en que difieren? ¿Cuál es la definición de primitiva?

b) Teoría: Para que una primitiva esté bien definida existen hipótesis que debo cumplir, ver bien donde llega la función $f(x)$, pues si es negativa o nula que ocurre?

c) Matraca: Ordenar las hipótesis, esto es más que nada teoría antes que matraca!

Primitivas conocidas:

$$1. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \forall \alpha \neq -1$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$3. \int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$$

$$4. \int \cos(x) dx = \sin(x) + C$$

$$5. \int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$$

$$6. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$$

$$7. \int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sqrt{1-x^2} + C$$

$$8. \int \sinh(x) dx = \cosh(x) + C$$

$$9. \int \cosh(x) dx = \sinh(x) + C$$

$$10. \int \sec^2(x) dx = \tan(x) + C$$

$$11. \int \operatorname{cosec}^2(x) dx = \cotg(x) + C$$

$$12. \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + C$$

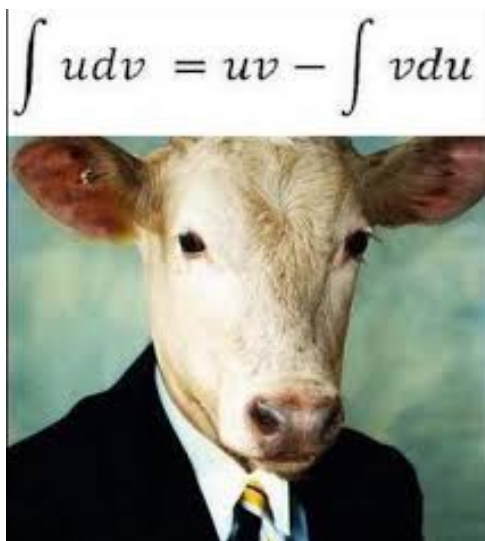


Figura 2: Un día vi una vaca sin cola vestida de uniforme.



$$1) \int \cos^5(x) dx$$
$$= \int \cos^4(x) \cos(x) dx$$

$$= \int \underbrace{(1 - \sin^2(x))^2}_{u} \underbrace{\cos(x)}_{du} dx$$

$$= \int (1 - u^2)^2 du$$

$$= \int (1 - 2u^2 - u^4) du$$

$$= \int 1 du + \int -2u^2 du + \int -u^4 du$$

$$= \int 1 du - 2 \int u^2 du - \int u^4 du$$

$$= u + C_1 - 2 \frac{u^3}{3} + C_2 - \frac{u^5}{5} + C_3, \quad C := C_1 + C_2 + C_3 \in \mathbb{R}$$

$$u = \sin(x) \quad \# \text{ Volta}$$
$$du = \cos(x) dx$$

$$= \sin(x) - \frac{2 \sin^3(x)}{3} - \frac{\sin^5(x)}{5} + C$$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) \quad / \quad ()^2$$

$$\cos^4(x) = (1 - \sin^2(x))^2$$

$$C.V \quad u = \sin(x)$$

$$du = \cos(x) dx$$

Linealidad

$$\left(\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \right)$$

Extra extra.

$$\int \cos^5 x \, dx \quad \text{Estudiamos } I = \int \cos^5 x \sin x \, dx$$

$f^5(x) \mid f'(x)$

$$I = - \int \underbrace{\cos^4 x}_{u^4} \underbrace{(\sin x) dx}_{du} \quad / \quad \begin{aligned} u &= \cos x \\ du &= -\sin x \, dx \end{aligned}$$

$$= - \int u^4 \, du = - \frac{u^5}{5} + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$= - \frac{\cos^5 x}{5} + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R} //$$

$$b) \int (x-1) \sqrt{x+4} dx, \quad u = (x+4)$$

$$\Rightarrow x-1 = u-5$$

$$\Rightarrow du = dx$$

$$= \int (u-5) \sqrt{u} du$$

$$= \int (u-5) u^{\frac{1}{2}} du =$$

$$= \int (u^{\frac{3}{2}} - 5u^{\frac{1}{2}}) du$$

$$= \int u^{\frac{3}{2}} du - 5 \int u^{\frac{1}{2}} du$$

$$= \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C_1 - 5 \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{2(x+4)^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{10(x+4)^{\frac{3}{2}}}{3} + C, \quad \# \quad u = x+4$$

$$C := C_1 + C_2 \in \mathbb{R}$$

$$c) \int \frac{1}{x - x^{3/5}} dx$$

$$u^5 = x$$

$$\int u^4 du = dx$$

$$= \int \frac{1}{u^5 - u^3} \cdot 5u^4 du$$

$$(u^5)^{3/5} = u^3$$

$$= 5 \int \frac{\cancel{u^3} \cdot u du}{\cancel{u^3} (u^2 - 1)}$$

$$= 5 \int \frac{u}{u^2 - 1} du \quad 2 \text{ Caminos}$$

$$t = u^2 - 1$$

$$dt = 2u du$$

$$= \frac{5}{2} \int \frac{1}{t} dt, (\ln u)' = \frac{1}{x}$$

$$= \frac{5}{2} \ln(t) + C, C \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{5}{2} \ln(|u^2 - 1|) + C, \begin{matrix} x = u^5 \\ x^{2/5} = u^2 \end{matrix}$$

$$= \frac{5}{2} \ln(|x^{2/5} - 1|) + C //$$

forma 2

$$\int \frac{u}{u^2 - 1} du = \frac{2}{2} \cdot 5 \int \frac{u}{u^2 - 1} du = \frac{5}{2} \int \frac{2u du}{u^2 - 1}$$

$$= \frac{5}{2} \int \frac{f'(u)}{f(u)} = \frac{5}{2} (\ln(|f(u)|))$$

$$= \frac{5}{2} (\ln |u^2 - 1|) + C, C \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{5}{2} \ln |x^{2/5} - 1| + C //$$

$\rightarrow$ Hipótesis
 $\rightarrow$ pronominal
 $\rightarrow$ tiempo
 $\rightarrow$ adverbios
 $\rightarrow$ inversos
 $\rightarrow$ log

Mem D'a Vi = una vaca sin cola vestidas uniforme

$$U dv = UV - \int v du$$

$u =$ 
 $\downarrow$
 qd que sepa
 de u

$dv =$ 
 $\downarrow$
 qd que sepa
 de v

$$\int x^2 e^x dx =$$

$u = x^2$
 $du = 2x dx$

$dv = e^x dx$
 $v = e^x$

$$I = \int \cos(\ln(x)) dx$$

C.V $x = e^y \Rightarrow \ln(x) = y$
 $dx = e^y dy$

$$I = \int \cos(\ln(x)) e^y dy$$

$$I = \int \cos(y) \cdot e^y dy$$

$$I = \cos(y) e^y + \int e^y \cdot \sin(y) dy$$

$$I = \cos(y) e^y + \sin(y) e^y - \int e^y \cos(y) dy$$

$$I = \frac{\cos(y) e^y + \sin(y) e^y}{2} + C, \quad I_C \in \mathbb{R} \Rightarrow I = \frac{\cos(\ln(x)) x + \sin(\ln(x)) x}{2} + C$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$u = \cos(y)$
 $du = -\sin(y) dy$

$dv = e^y dy$
 $v = e^y$

$$2) \int \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}} dx = \int \frac{e^{2x} \cdot e^x}{1+e^{2x}} dx \quad \begin{array}{l} e^x = u \\ e^x dx = du \end{array}$$

$$= \int \frac{u^2 + 1 - 1}{u^2 + 1} du$$

$$= \int \left(\frac{u^2 + 1}{u^2 + 1} - \frac{1}{u^2 + 1} \right) du$$

$$= \int du - \int \frac{1}{u^2 + 1} du$$

$$= u + C_1 - \arctan(u) + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$= e^x - \arctan(e^x) + C \quad // \quad C := C_1 + C_2$$

$$u = e^x$$



fcfm

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Sol: prisa en f min $\triangleleft$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \int \frac{1}{(1-x)(1+x)} dx$$

$$\frac{1}{(1+x)(1-x)} = \left[\frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-x} \right] = \frac{A(1-x) + B(1+x)}{(1+x)(1-x)}$$

$$= \frac{x(B-A) + A+B}{1-x^2} \triangleleft$$

$$\begin{aligned} B-A &= \Rightarrow B=A \\ A+B &= 1 \quad \downarrow \quad B = \frac{1}{2}, A = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{(1-x)(1+x)} dx = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x} \right) dx \quad \downarrow \text{linealidad}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln|1-x| + C_1 + \frac{1}{2} \ln|1+x| + C_2$$

$$C := C_1 + C_2 \in \mathbb{R}$$

b) $\int \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2(x^2+1)} dx$ // Recuerdo fracciones
 Parciales y sumatorias
integra y Taylor
Riemann



fcfm

Ingeniería Matemática
 FACULTAD DE CIENCIAS
 FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
 UNIVERSIDAD DE CHILE

integración por parte



fcfm

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Polinomios, log, e^x , trigonométricos, hiperbólicos, integrales
trigonométricas

$$u dv = uv - \int v du$$

$$\begin{array}{c} \text{I L A T H E} \\ \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} u = \text{ } \\ \Rightarrow du \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} dv = \text{ } \\ \Rightarrow v \end{array}$$

$$I = \int \cos(\ln|x|) dx$$

$$\begin{array}{l} e^y = x \\ e^y dy = dx \end{array}$$

$$I = \int \cos(\ln(e^y)) e^y dy$$

$$I = \int \cos(y) \cdot e^y dy$$

$$\begin{array}{l} u = \cos(y) \\ du = -\sin(y) dy \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} dv = e^y dy \\ v = e^y \end{array} \right.$$

$$u dv = uv - \int v du$$

$$I = \int \cos(y) e^y dy = \cos(y) e^y + \int e^y \sin(y) dy$$

$$I = \cos(y) e^y + \sin(y) e^y - \int e^y \cos(y) dy$$

$$I = \cos(y) e^y + \sin(y) e^y - I$$

$$I = \frac{\cos(y) e^y + \sin(y) e^y}{2} + C, C \in \mathbb{R} \quad \left| \begin{array}{l} x = e^y \\ \ln|x| = y \end{array} \right.$$

$$I = \frac{\cos(\ln|x|) \cdot x + \sin(\ln|x|) \cdot x}{2} + C, C \in \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{l} u' = \sin(y) \\ du' = \cos(y) dy \\ dv' = e^y dy \\ v' = e^y \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2} \quad , \quad x = a \tan(u) \\
 & \quad \quad \quad dx = a \sec^2(u) du \\
 & = \int \frac{a \sec^2(u) du}{(a^2 + a^2 \tan^2(u))^2} = \int \frac{a \sec^2(u) du}{a^4 (1 + \tan^2(u))^2} \\
 & = \frac{1}{a^3} \int \frac{\sec^2(u) du}{\sec^4(u)}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{a^3} \int \frac{du}{\sec^2(u)}$$

$$= \frac{1}{a^3} \int \cos^2(u) du$$

$$= \frac{1}{a^3} \int \frac{\cos(2u) + 1}{2} du$$

$$= \frac{1}{a^3} \left(\int \frac{\cos(2u)}{2} du + \int \frac{1}{2} du \right)$$

$$= \frac{1}{a^3} \left[\frac{\sin(2u)}{2} + u + C \right], C \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{1}{a^3} \left[\frac{\sin(2 \arctan(\frac{x}{a}))}{2} + \arctan(\frac{x}{a}) + C \right] \quad \begin{aligned} x &= a \tan(u) \\ \arctan(\frac{x}{a}) &= u \end{aligned}$$

$$1 + \tan^2(u) = \sec^2(u)$$

$$\cos^2 + \sin^2 = 1 \quad | \div \cos^2$$

$$1 + \frac{\sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}$$

$$1 + \tan^2 = \sec^2$$

$$\# \cos(2u) = \cos^2(u) - \sin^2(u)$$

$$\sin^2(u) = 1 - \cos^2(u)$$

$$\Rightarrow \cos(2u) = \cos^2(u) - 1 + \cos^2(u)$$

$$\cos(2u) = 2\cos^2(u) - 1$$

$$\frac{\cos(2u) + 1}{2} = \cos^2(u)$$

$$\# \quad x = a \sinh(u) \quad C.V$$

$$\bullet \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2 + 1}}$$

$$= \int \frac{\cosh(u) du}{\sqrt{\sinh^2(u) + 1}}$$

$$= \int \frac{\cosh(u) du}{\cosh(u)} = u + C, C \in \mathbb{R}$$

$$= \operatorname{arcsinh}(x+1) + C, C \in \mathbb{R}$$

$$C.V \rightarrow \begin{cases} x+1 = \sinh(u) \\ dx = \cosh(u) du \end{cases}$$

$$\# \cosh^2 - \sinh^2 = 1$$

$$\# \quad x+1 = u$$

$$u = \sinh(v)$$

P1. Intuición y Resumen

Cálculo Diferencial: Dada f , obtener f' y un problema.

Cálculo Integral: Dada f' , obtener f y un problema.

Operador integral $\int$

¿Qué es $\int f = \int f(x) dx$?

En cualquier función derivable h (ie $\int f = h$) que cumpla $h' = f$
ie $\int h' = h$ (obv: h se dice una primitiva de f) ($\int$ es op. inversa a ' $\int$)

Notar que $\forall C \in \mathbb{R}, (h+C)' = h' = f \Rightarrow \int f = h+C, \forall C \in \mathbb{R}$

Ant, todas las primitivas de f son de la forma $h+C$, con $C \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \boxed{\int h' = h + C, \forall C \in \mathbb{R}}$ 1° Prop. Fundamental de primitivas.

P1. Intuición y Resumen

Recordar que $\int f = h + C, \forall C \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \int f = \frac{d}{dx} (h + C) = h' = f$$

$$\Rightarrow \boxed{(\int f)' = f} \quad \text{2}^\circ \text{ prop. fundamental de primitivas}$$

$$\text{Además: } \boxed{\int f + \lambda g = \int f + \lambda \int g, \forall f, g, \forall \lambda \in \mathbb{R}} \quad \text{Ser operador lineal}$$

1}^\circ \text{ prop. fundamental de primitivas}

Ejemplos:

- $(x^2)' = 2x \Rightarrow \int 2x = 2 \int x = \int (x^2)' = x^2 + C, C \in \mathbb{R}$
- $(\sin(x))' = \cos(x) \Rightarrow \int \cos(x) = \int (\sin(x))' = \sin(x) + C, C \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \int x = \frac{x^2}{2} + \tilde{C}, \tilde{C} \in \mathbb{R}$$

P2. Cambio de Variable

$$a) \int \frac{e^{3\theta}}{1+e^{2\theta}} d\theta$$

$$\int f(u) du, u = g(x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = g'(x) \Rightarrow du = g'(x) dx$$

$$\parallel \leftarrow \int f(g(x)) \cdot g'(x) dx$$

$$\text{Rec: } (\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\int \frac{e^{3\theta}}{1+e^{2\theta}} d\theta = \int \frac{(e^\theta)^2}{1+(e^\theta)^2} e^\theta d\theta = \int \frac{u^2}{1+u^2} du = \int \frac{1+u^2-1}{1+u^2} du$$

$$\begin{array}{l} \text{c.v.:} \\ u = e^\theta \\ du = e^\theta d\theta \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= \int 1 du - \int \frac{1}{1+u^2} du \\ &= u - \arctan(u) + C, C \in \mathbb{R} \\ &= e^\theta - \arctan(e^\theta) + C, C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

P3. Integración por Partes

a) $\int x^2 e^x dx$

fórmula de integración por partes

$$\int f(x)g(x)dx = \int \underbrace{u}_{\text{una cosa}} d\underbrace{v}_{\text{una cosa}} = \underbrace{uv}_{\text{producto}} - \int \underbrace{v}_{\text{una cosa}} d\underbrace{u}_{\text{una cosa}}$$

Pensar

u (f(x) = f(x))

dv (= g(x)dx)

$$du = f'(x)dx$$

$$v = \int g(x)dx$$

$$\int \underbrace{x^2}_u \underbrace{e^x dx}_{dv}$$

$$\left(\begin{array}{l} u = x^2 \\ du = 2x dx \end{array} \quad \begin{array}{l} dv = e^x dx \\ v = e^x \end{array} \right)$$

$$= uv - \int v du = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2 \int \underbrace{x e^x dx}_{(*)}$$

P3. Integración por Partes

$$a) \int x^2 e^x dx$$

$$(*) \int \underbrace{x}_u \underbrace{e^x dx}_{dv} \quad \left(\begin{array}{l} u = x \\ du = dx \end{array} \quad \begin{array}{l} dv = e^x dx \\ v = e^x \end{array} \right)$$

$$= uv - \int v du = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x = e^x (x - 1).$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx \\ &= x^2 e^x - 2 e^x (x - 1) + C, C \in \mathbb{R} \\ &= e^x (x^2 - 2x + 2) + C, C \in \mathbb{R} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

P4. Fracciones Parciales

$$a) \int \frac{x}{(1+x^2)(1+x)} dx$$

$$\frac{x}{(1+x^2)(1+x)} = \frac{x}{1 \cdot (x-(-1))^1 \cdot (x^2+0 \cdot x+1)^1}$$

$$= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$= \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+1)}$$

$$\Rightarrow x = Ax^2 + A + Bx^2 + Bx + Cx + C$$

$$\Rightarrow (A+B)x^2 + (B+C)x + (A+C) = 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 & (B=-A) \\ B+C=1 \\ A+C=0 & (C=-A) \end{cases}$$

$$(1) \text{ y } (3) \text{ en } (2) \Rightarrow -2A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

(1)
(2)
(3)

$$B = C = \frac{1}{2}$$

Se desea integrar funciones $R(x)$ de la forma:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0},$$

con $n < m$.

Si suponemos que el polinomio $Q(x)$ se ha factorizado de la siguiente forma:

$$Q(x) = b_m (x - r_1)^{\alpha_1} (x - r_s)^{\alpha_s} \cdot (x^2 + b_1 x + c_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + b_t x + c_t)^{\beta_t}$$

En donde $r_1, \dots, r_s$ son las raíces de Q , de multiplicidades $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, y $\beta_1, \dots, \beta_t$ son números enteros positivos, con $x^2 + b_i x + c_i$ polinomios irreducibles.

Entonces $R(x)$ es igual a la suma de funciones racionales del siguiente tipo:

1. Por cada término $(x - r_i)^{\alpha_i}$ aparece la suma de α_i funciones:

$$\frac{A_{1i}}{(x - r_i)} + \frac{A_{2i}}{(x - r_i)^2} + \dots + \frac{A_{\alpha_i i}}{(x - r_i)^{\alpha_i}}.$$

2. Por cada término $(x^2 + b_i x + c_i)^{\beta_i}$ aparece la suma de β_i funciones de la forma:

$$\frac{B_{1i}x + C_{1i}}{x^2 + b_i x + c_i} + \frac{B_{2i}x + C_{2i}}{(x^2 + b_i x + c_i)^2} + \dots + \frac{B_{\beta_i i}x + C_{\beta_i i}}{(x^2 + b_i x + c_i)^{\beta_i}}$$

P4. Fracciones Parciales

$$a) \int \frac{x}{(1+x^2)(1+x)} dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{x}{(1+x^2)(1+x)} dx = \int \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2+1} \right) dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{x+1}{x^2+1} \right) \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{x}{x^2+1} dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx \right]$$

(1) (2) (3)

$$(1) \int \frac{1}{x+1} dx$$

c.v.:

$$\int \frac{1}{u} du = \ln|u| = \ln|x+1|$$

Rec: $(\ln|u|)' = \frac{1}{u}$

$$u = x+1$$

$$du = dx$$

Se desea integrar funciones $R(x)$ de la forma:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0},$$

con $n < m$.

Si suponemos que el polinomio $Q(x)$ se ha factorizado de la siguiente forma:

$$Q(x) = b_m (x - r_1)^{\alpha_1} (x - r_s)^{\alpha_s} \cdot (x^2 + b_1 x + c_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + b_t x + c_t)^{\beta_t}$$

En donde $r_1, \dots, r_s$ son las raíces de Q , de multiplicidades $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, y $\beta_1, \dots, \beta_t$ son números enteros positivos, con $x^2 + b_i x + c_i$ polinomios irreducibles.

Entonces $R(x)$ es igual a la suma de funciones racionales del siguiente tipo:

1. Por cada término $(x - r_i)^{\alpha_i}$ aparece la suma de α_i funciones:

$$\frac{A_{1i}}{(x - r_i)} + \frac{A_{2i}}{(x - r_i)^2} + \dots + \frac{A_{\alpha_i i}}{(x - r_i)^{\alpha_i}}.$$

2. Por cada término $(x^2 + b_i x + c_i)^{\beta_i}$ aparece la suma de β_i funciones de la forma:

$$\frac{B_{1i}x + C_{1i}}{x^2 + b_i x + c_i} + \frac{B_{2i}x + C_{2i}}{(x^2 + b_i x + c_i)^2} + \dots + \frac{B_{\beta_i i}x + C_{\beta_i i}}{(x^2 + b_i x + c_i)^{\beta_i}}.$$

P4. Fracciones Parciales

$$a) \int \frac{x}{(1+x^2)(1+x)} dx$$

$$(2) \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln |u|$$

C.V.:
 $u = x^2 + 1$
 $du = 2x dx$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$$

$$(3) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x)$$

$$\therefore \int \frac{x}{(1+x^2)(1+x)} dx = \frac{1}{2} [-\ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \arctan(x)] + C, C \in \mathbb{R}$$

Se desea integrar funciones $R(x)$ de la forma:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0},$$

con $n < m$.

Si suponemos que el polinomio $Q(x)$ se ha factorizado de la siguiente forma:

$$Q(x) = b_m (x - r_1)^{\alpha_1} (x - r_s)^{\alpha_s} \cdot (x^2 + b_1 x + c_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + b_t x + c_t)^{\beta_t}$$

En donde $r_1, \dots, r_s$ son las raíces de Q , de multiplicidades $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, y $\beta_1, \dots, \beta_t$ son números enteros positivos, con $x^2 + b_i x + c_i$ polinomios irreducibles.

Entonces $R(x)$ es igual a la suma de funciones racionales del siguiente tipo:

1. Por cada término $(x - r_i)^{\alpha_i}$ aparece la suma de α_i funciones:

$$\frac{A_{1i}}{(x - r_i)} + \frac{A_{2i}}{(x - r_i)^2} + \dots + \frac{A_{\alpha_i i}}{(x - r_i)^{\alpha_i}}.$$

2. Por cada término $(x^2 + b_i x + c_i)^{\beta_i}$ aparece la suma de β_i funciones de la forma:

$$\frac{B_{1i} x + C_{1i}}{x^2 + b_i x + c_i} + \frac{B_{2i} x + C_{2i}}{(x^2 + b_i x + c_i)^2} + \dots + \frac{B_{\beta_i i} x + C_{\beta_i i}}{(x^2 + b_i x + c_i)^{\beta_i}}.$$

P5. Sustitución Trigonométrica

$$a) \int \frac{1}{\sqrt{(4-x^2)^3}} dx$$

$$\int \frac{1}{(4-x^2)^{3/2}} dx = \int \frac{1}{(2^2-x^2)^{3/2}} dx$$

$\xrightarrow{\text{mt. trig. } 2^2-x^2}$
 $\checkmark \quad x = 2 \sin(t)$
 $\quad dx = 2 \cos(t) dt$
 $\checkmark \quad \frac{x}{2} = \sin(t)$
 $\Rightarrow t = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\int \frac{1}{\underbrace{(4-4\sin^2(t))^{3/2}}_{4(1-\sin^2(t))=4\cos^2(t)}} 2 \cos(t) dt = 2 \int \frac{\cancel{\cos(t)}}{8 \cos^3(t)} dt = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\cos^2(t)} dt$$

$$= \frac{1}{4} \int \sec^2(t) dt$$

Rec:
 $(\tan(u))' = \sec^2(u)$

$$= \frac{1}{4} \tan(t) + C, C \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{1}{4} \tan\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C, C \in \mathbb{R}$$

Prop 3 (Sustituciones trigonométricas). Se recomiendan los siguientes cambios de variables

- para $a^2 + x^2$, usar $x = a \tan(v)$ o $x = a \sinh(v)$
- para $a^2 - x^2$, usar $x = a \sin(t)$ o $x = a \cos(t)$
- para $x^2 - a^2$, usar $x = a \sec(v)$ o $x = a \cosh(v)$

P6. Integral Trigonométrica

$$a) \int \frac{\sin(x)}{1 + \sin(x) + \cos(x)} dx$$

Para funciones racionales en función de $\sin$ y $\cos$:

$$\underline{\text{C.V.}}: t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \boxed{dt = \sec^2\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} dx} \quad (1)$$

$$\frac{x}{2} = \arctan(t) \Rightarrow x = 2 \arctan(t) \Rightarrow \boxed{dx = \frac{2dt}{1+t^2}} \quad (2) \quad \begin{array}{l} 1 - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ // \end{array}$$

$$(1) \text{ y } (2) \Rightarrow dt = \sec^2\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \frac{2dt}{1+t^2} \Rightarrow 1 = \frac{1}{\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{1}{1+t^2} \Rightarrow \sec^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad \wedge \quad \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\Rightarrow \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \wedge \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\text{e.s. } \underline{\text{C.V.}}: t = \tan\left(\frac{x}{2}\right), \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

P6. Integral Trigonométrica

$$a) \int \frac{\sin(x)}{1 + \sin(x) + \cos(x)} dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{\sin(x)}{1 + \sin(x) + \cos(x)} dx$$

$$\stackrel{\text{C.V.}}{\downarrow} \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{\frac{4t}{1+t^2}}{1+t^2+2t+1-t^2} dt$$

$$= 2 \int \frac{t}{\frac{1+t^2}{t+1}} dt = 2 \int \frac{t}{(1+t^2)(t+1)} dt$$

$$= -\ln|t+1| + \frac{1}{2} \ln(1+t^2) + \arctan(t) + C, C \in \mathbb{R}$$

$$\stackrel{\text{P4}}{\downarrow} = -\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right| + \frac{1}{2} \ln\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \frac{x}{2} + C, C \in \mathbb{R}$$