MA1002 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Patricio Yáñez
Correo:pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 5: Aplicaciones de Derivadassssss(El regreso) e Integrales

- Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Se tiene lo siguiente
  - Si $f'(x)\geq 0, \forall x\in(a,b)$, entonces f es creciente.
  - Si $f'(x)\leq 0, \forall x\in(a,b)$, entonces f es decreciente.

  Análogo para estrictamente creciente/decreciente
- **[Convexidad]** Una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ se dice convexa si $\forall x,y\in[a,b], x<y$ se tiene que
$$f(z)\leq f(x)+\left[\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right](z-x),\quad \forall z\in(x,y)$$
  o equivalentemente
$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\leq\frac{f(y)-f(z)}{y-z}$$
- Una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces f es convexa en $[a,b]$ si y sólo si f' es creciente en (a,b). En el caso de que f' sea diferenciable, notamos que f sera convexa si $f''\geq 0$.
- **[Concavidad]** f se dirá cóncava si $-f$ es convexa. Por lo tanto, en el caso de que f sea diferenciable se estudiará si f' es decreciente
- **[Error $o(\cdot)$ en Desarrollo de Taylor]** Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $(k+1)$-veces derivable en todo punto del intervalo (a,b). Sea $T_f^k(\cdot)$ el polinomio de taylor de orden k en $\overline{x}\in(a,b)$. Entonces, para todo $x>\overline{x}$ (respectivamente $x<\overline{x}$) existe $\xi\in(\overline{x},x)$ (respectivamente $\xi\in(x,\overline{x})$ tal que:
$$f(x)=T_f^k(x-\overline{x})+\frac{f^{[k+1]}(\xi)}{(k+1)!}(x-\overline{x})^{k+1}$$
  Es decir, se encontró una expresión para el error $o(\cdot)$
- **[Fórmula de Leibnitz]** Para f y g funciones con derivadas de orden n en a, la derivada de orden n de $(f\cdot g)$ está dada por:
$$(f\cdot g)^{(n)}(a)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(a)\cdot g^{(n-k)}(a)$$

P1. Calcule primitivas:

a) $\int cos^5(x)dx$

b) $\int (x-1)\sqrt{x+4}dx$

c) $\int \frac{dx}{x-x^{\frac{3}{5}}}$

d) $\int \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}dx$

e) $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$

f) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

P2. Resuelva usando integración por partes

a) $\int x^2e^xdx$ *b)* $\int cos(ln(x))dx$

P3. Generalización Integración por partes Este ejercicio busca que busquemos un método de hacer integración por partes, pero sin importar la cantidad de veces que deba iterar el proceso. En este caso ¿Cómo puedo escribirlo? (Porpuesto)

P4. Resuelva usando fracciones parciales *a)* $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2}$ *b)* $\displaystyle\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$

a) Intuición:
b) Teoría:
c) Matraca:

P5. *a)* Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones derivables que verifican lo siguiente:

$$g(x) = xf(x) + 1, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R},\ g(x+y) = g(x)g(y), \qquad f(0) = 1$$

1) Demuestre que $g'(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
2) Demuestre que $\forall n \geq 1$, $g(x) = xf^{(n)}(x) + nf^{(n-1)}(x)$ y calcule $f^{(n)}(0)$.

b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Demuestre que:

$$\lim_{\delta \to 0} \left(\frac{f(x + x\delta)}{f(x)} \right)^{1/\delta}$$

existe, es positivo y calcúlelo.

a) Intuición:
b) Matraca:
c) Teoría

Propuestos

1. A desarrollar:
Estudiar completamente la función definida por

$$f(x) = x + 1 - \frac{2}{x} - \frac{3ln(x)}{x}$$

2. A desarrollar x2
Considere la función $f(x) = (x+1)ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right)$, definida en $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$

a) Encuentre ceros y signos de f

b) Estudie las asíntotas horizontales de f. Encuentre los limites laterales cuando $x \to 0^{\pm}$ y $x \to -1^{\pm}$ y ya sea, repare la función para que ea continua, o biem, detecte si hay asíntotas verticales.

c) Use el teorema de valor medio en la función auxiliar $g(x) = ln(|x|)$ en el intervalo $[x, x+1]$ para probar que

$$\frac{1}{x+1} < ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{1}{x}, \quad \forall x \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$$

d) Calcule la primera derivada de f. Use el resultado de la parte anterior para concluir sobre el crecimiento de f en $(-\infty, -1)$ y en $(0, \infty)$

e) Calcule $f''(x)$ e indique los intervalos donde f es cóncava y donde es convexa

f) Estudie los limites de $f'(x)$ cuando $x \to -1^{+}$ y cuando $x \to 0^{-1}$. Usando el signo de la segunda derivada en $(-1, 0)$ concluya sobre la monotonía de f' en dicho intervalo y pruebe que existe un único punto donde $f'(x) = 0$. Bosqueje el gráfico de f

"It is not the task of the University to offer what society asks for, but to give what society needs."
Edsger W. Dijkstra