

MA1002 Cálculo Diferencial e Integral

Pauta auxiliar #2 - Continuidad y continuidad uniforme de funciones

Profesor: Leonardo Sanchez. **Auxiliar:** Patricio Yañez. **Reemplazo:** Manuel Torres¹.

Consideraremos las siguientes caracterizaciones de continuidad y continuidad uniforme:

Definición 1 (Continuidad y continuidad uniforme).

1. Se dice que f es *continua* en $x_0 \in A$ si

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0), |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

2. Se dice que f es *continua* en A si

$$(\forall x, y \in A) (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0), |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

3. Se dice que f es *uniformemente continua* en A si

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x, y \in A), |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Resulta un hecho evidente que $(3) \implies (2) \implies (1)$, basta notar la expresión con los cuantificadores para verificar estas implicaciones. Los objetivos de esta clase son:

1. Reforzar los cálculos de límites que se involucran en los problemas de continuidad.
2. Aplicar los teoremas clásicos de continuidad: Teorema del valor intermedio, Teorema de Weierstrass y Teorema de Bolzano.
3. Comprender la diferencia entre continuidad y continuidad uniforme.

P1.- Composición de funciones continuas: Demuestre que la función $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ es continua sobre el intervalo $[-1, 1]$.

Solución: Sean

$$g(x) = 1 - x^2$$

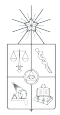
$$h(x) = \sqrt{x}$$

luego notar,

$$g([-1, 1]) = [0, 1]$$

$$h([0, 1]) = [0, 1]$$

¹ Contacto: manuel.torres@ug.uchile.cl



Como g es continua en $[-1, 1]$ y h es continua en $[0, 1]$, entonces la composición $f = h \circ g$ es continua en $[-1, 1]$.

P2.- Ejemplos de funciones continuas: Determine el dominio de las siguientes funciones, luego explique por qué cada una de las siguientes funciones es continua en todo punto de su dominio.

$$a) a(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 + 1}$$

$$d) d(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$$

$$f) f(x) = \frac{e^{\sin(x)}}{2 + \cos(\pi x)}$$

$$b) b(x) = \frac{\sqrt[3]{x-2}}{x^3 - 2}$$

$$e) e(x) = \frac{x^2 + 1}{2x^2 - x - 1}$$

$$g) g(x) = \frac{\tan(x)}{\sqrt{4 - x^2}}$$

Solución (a): Considerando $f(x) = 2x^2 - x - 1$, f es continua en $\mathbb{R}$. Por otro lado, $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ es continua en todo $\mathbb{R}$, pues $x^2 + 1 \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ u g es división de funciones continuas, luego $a = f/g$ es continua $\mathbb{R}$.

P3.- Continuidad de función definida mediante un límite sobre un parámetro: Considere la función

$$f(x) := \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y + \sin(x) - 1}{x + y}$$

Determine $f(0)$, calcule el valor de $f(x)$ para $x \neq 0$ y además estudie la continuidad de f en todo $\mathbb{R}$.

Solución: Notar que para $x \neq 0$, evaluando el límite:

$$f(x) := \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y + \sin(x) - 1}{x + y} = \frac{\sin x}{x}$$

mientras que para $x = 0$ la función es el siguiente límite:

$$f(0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

Luego se puede escribir f como:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Luego como

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

se concluye que f es continua en $\mathbb{R}$.

P4.- Reparación de discontinuidades: ¿Cuál de las funciones f siguientes tiene discontinuidad removible en $x = a$? Si la discontinuidad es removible, determine una función g que concuerde con f para $x \neq a$ y sea continua en $x = a$.

a) $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x - 1}, a = 1.$

b) $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x - 2}, a = 2.$

Solución:

a)

$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)}{x - 1} = (x + 1)(x^2 + 1)$$

luego, como

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1)(x^2 + 1) = 4$$

se define,

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , x \neq 1 \\ 4 & , x = 1 \end{cases}$$

b)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x - 2} \\ &= \frac{x(x^2 - x - 2)}{x - 2} \\ &= x(x + 1) \end{aligned}$$

luego, como

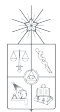
$$\lim_{x \rightarrow 2} x(x + 1) = 6$$

se define,

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , x \neq 2 \\ 6 & , x = 2 \end{cases}$$

P5.- Aplicación del teorema del valor intermedio:

- a) *Existencia de punto fijo:* Sea $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ una función continua y sobreyectiva. Demuestre que existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = x_0$.
- b) Demuestre que la ecuación $x^5 + x^3 - 1 = 0$ tiene al menos una solución real.



c) Muestre que:

- 1) La función $f(x) = xe^{x-1} - \frac{1}{2}$ tiene un cero en $[0, 1]$.
- 2) La expresión $x^4 = 2^x$ admite al menos una solución real.
- 3) La ecuación $x^3 + x + 1 = 0$ tiene al menos una solución real. Además encuentre un intervalo de largo a lo más $\frac{1}{2}$ que contenga la solución.
- 4) $p(x) = 0$ tiene por lo menos una solución real, con $p(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ polinomio de grado impar.

Solución:

- a) Se tiene $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ continua. Sea la función $g(x) = f(x) - x$ que también es continua. recordemos que, como $f(x) \in [a, b]$, se debe cumplir que $a \leq f(x) \leq b$ para todo $[a, b]$. Evaluando g en los extremos el intervalo, luego

$$g(a) = f(a) - a \geq 0$$

$$g(b) = f(b) - b \leq 0$$

Entonces, por el TVI se concluye que existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $g(x_0) = 0$, por lo tanto $f(x_0) = x_0$.

.....

- b) Sea $f(x) = x^5 + x^3 - 1$ una función continua en $\mathbb{R}$, veremos que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$. Considerando $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$, luego $f(x_1) = -1$ y $f(x_2) = 1$, entonces por TVI, se concluye que existe $x_0 \in (0, 1)$ tal que $f(x_0) = 0$, por lo tanto la ecuación $x^5 + x^3 - 1 = 0$ tiene una solución real.

.....

- c) Considerando cada relación como una función y verificando su continuidad, luego:

- 1) Considerando $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$, entonces $f(0) = -1/2 < 0$ y $f(1) = 1/2 > 0$, entonces por el TVI existe $x_0 \in (0, 1)$ tal que $f(x_0) = 0$.
- 2) Sea $f(x) = x^4 - 2^x$ una función continua en $\mathbb{R}$. Considerando $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$, entonces $f(1) < 0$ y $f(2) > 0$, entonces por el TVI existe $x_0 \in (1, 2)$ tal que $f(x_0) = 0$, por lo tanto la ecuación $x^4 = 2^x$ admite al menos una solución real.
- 3) Sea $f(x) = x^3 + x + 1$ una función continua en $\mathbb{R}$. Considerando $x_1 = -1/2$ y $x_2 = -1$, entonces $f(-1/2) > 0$ y $f(-1) < 0$, entonces por el TVI existe $x_0 \in (-1, -1/2)$ (intervalo de longitud $1/2$) tal que $f(x_0) = 0$, esto es que $x^3 + x + 1 = 0$ admite una solución real.
- 4) Sea $p(x)$ un polinomio de grado impar, por lo que evidentemente será una función continua en $\mathbb{R}$. Luego notar que para $a_n \neq 0$:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x + x a_{n-1} \frac{x^{n-1}}{x^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{x}{x^{n-1}} + a_0 \frac{1}{x^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x + a_{n-1}.$$

Finalmente, como

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = \text{sign}(a_n) \cdot (+\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = \text{sign}(a_n) \cdot (-\infty)$$

Como existen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tales que $p(x_1) < 0$ y $p(x_2) > 0$, por el TVI se concluye que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $p(x_0) = 0$.

P6.- *Aplicación del teorema de Bolzano:* Sean $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ funciones continuas y epiyectivas. Demuestre que existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = g(c)$.

Solución: Notemos que

$$(\exists c \in [0, 1]) : f(c) = g(c) \iff (\exists c \in [0, 1]) : f(c) - g(c) = 0.$$

Demostraremos esta última formulación, para ello definimos la función $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = f(x) - g(x)$. Como f es epiyectiva, todos los puntos del codominio de f , es decir $[0, 1]$, poseen preimagen, en particular:

$$(\exists \hat{x}, \bar{x} \in [0, 1]) : f(\hat{x}) = 0, f(\bar{x}) = 1.$$

Además, como $0 \leq g(x) \leq 1$, luego:

$$h(\hat{x}) = f(\hat{x}) - g(\hat{x}) \leq 0,$$

$$h(\bar{x}) = f(\bar{x}) - g(\bar{x}) \geq 0.$$

Como h es una función continua al ser una resta de funciones continuas, por el *teorema de Bolzano* existe $c \in [\min\{\hat{x}, \bar{x}\}, \max\{\hat{x}, \bar{x}\}] \subset [0, 1]$ tal que $h(c) = 0$, vale decir, dicho $c \in [0, 1]$ satisface que $f(c) = g(c)$.

P7.- *Aplicación del teorema de Weierstrass:* Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$.

a) Pruebe que existen $\underline{x}, \bar{x} \in [a, b]$ tales que

$$f(\underline{x}) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leq f(\bar{x}), \forall x_1, x_2 \in [a, b]$$

b) Demuestre que dados $x_1, x_2 \in [a, b]$ cualesquiera existe $\beta \in [a, b]$ tal que

$$f(\beta) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

Solución:

- a) Puesto que f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, por el Teorema de Weierstrass f alcanza su mínimo y su máximo. Sean entonces $m, M \in [a, b]$ valores del dominio en que f toma su mínimo y su máximo valor respectivamente. Esto es,

$$f(m) \leq f(x_1) \leq f(M)$$

$$f(m) \leq f(x_2) \leq f(M)$$

Luego sumando ambas desigualdades se obtiene

$$2f(m) \leq f(x_1) + f(x_2) \leq 2f(M)$$

entonces

$$f(m) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leq f(M)$$

Como x_1, x_2 son arbitrarios, lo anterior es válido para todo $x_1, x_2 \in [a, b]$. Luego tomando $\underline{x} = m$ y $\bar{x} = M$, se concluye que

$$f(\underline{x}) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leq f(\bar{x}), \forall x_1, x_2 \in [a, b]$$

- b) Puesto que f es continua en $[a, b]$, y considerando $x_1, x_2 \in [a, b]$ cualesquiera, como $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ está comprendida entre dos imágenes de la función, por el TVI se concluye que existe $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

P8.- Continuidad uniforme:

- a) Estudie la continuidad uniforme en $[0, 1]$ de las siguientes funciones:

1) $f(x) = x \sin(1/x)$.

2) $f(x) = e^x \cos(1/x)$.

- b) Sean f, g, h funciones cuya regla de asignación viene dada por:

$$f(x) = x - \lfloor x \rfloor$$

$$g(x) = \sin(\pi f(x))$$

$$h(x) = \cos(\pi f(x))$$

- 1) Estudie la continuidad y continuidad uniforme de $g(x)$ y $h(x)$ en $\mathbb{R}$.
- 2) Estudie la continuidad y continuidad uniforme de $g(x)$ y $h(x)$ en $[0, 1]$.
- 3) Sea H el conjunto de puntos de discontinuidad de f . Muestre que $|H| = |\mathbb{N}|$.

Solución (a):

- a) 1) Las funciones continuas, cuyo dominio es un intervalo compacto (cerrado y acotado, en el caso de $\mathbb{R}$) son uniformemente continuas. Para mostrar dichas condiciones, primero construiremos una función auxiliar:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (0, 1] \\ 0 & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \in (0, 1] \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Esta función es continua en $(0, 1]$ por ser composición de funciones continuas, y es continua en 0, pues

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0).$$

Por lo tanto, g es continua en $[0, 1]$ que es compacto (cerrado y acotado), por lo que la función además es uniformemente continua. Luego, si se quitan los puntos de los extremos de la continuidad no se altera, y en particular f es uniformemente continua en $(0, 1)$.

.....

- 2) La caracterización usual de continuidad uniforme, para una función $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es la siguiente:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in A), |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

ó equivalentemente mediante sucesiones como:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A), \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - y_n| = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n) - f(y_n)| = 0.$$

Notamos que la negación de esta definición es la siguiente:

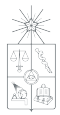
$$(\exists \varepsilon > 0)(\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A), \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - y_n| = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n) - f(y_n)| \neq 0.$$

Veremos que esta función no es uniformemente continua, hay que tomar dos sucesiones que en diferencia converjan a 0, pero que evaluadas mediante f no. Proponemos como candidatos:

$$\begin{aligned} x_n &:= \frac{1}{2n\pi}, \\ y_n &:= \frac{1}{\pi + 2n\pi}. \end{aligned}$$

Notemos que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - y_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2n\pi} - \frac{1}{\pi + 2n\pi} \right| = 0,$$



y

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n) - f(y_n)| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| e^{\frac{1}{2n\pi}} \cos\left(\frac{1}{2n\pi}\right) - e^{\frac{1}{\pi+2n\pi}} \cos\left(\frac{1}{\pi+2n\pi}\right) \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| e^{\frac{1}{2n\pi}} \cos(2n\pi) - e^{\frac{1}{\pi+2n\pi}} \cos(\pi + 2n\pi) \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| e^{\frac{1}{2n\pi}} + e^{\frac{1}{\pi+2n\pi}} \right| \geq 2.\end{aligned}$$

Como $|x_n - y_n|$ converge a 0 pero $|f(x_n) - f(y_n)|$ no converge, entonces bastará con tomar $\varepsilon = 2$ para concluir que la función no es uniformemente continua.