

P1. Calcule los siguientes límites, inserte hipótesis(ale):

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n!}{(n!)!}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2)^{n \cdot 2^{-n}}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3n^2 + 2}\right)^{4n^2}$

a) INTUICIÓN:

b) TEORÍA:

c) MATRACA:

P2. Verifiquemos el valor de verdad

Dada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y con x_n una sucesión en $[a, b]$, entonces existe una subsucesión $x_{\phi(n)}$ y $x_1 \in [a, b]$ tal que $f(x_{\phi(n)}) \rightarrow f(x_1)$ con $n \rightarrow \infty$

PASOS PARA EL ÉXITO:

P3. Pruebe que las siguientes sucesiones no convergen:

a) $u_n = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right)$

b) $v_n = \left(-1 + \frac{1}{n}\right)^n$

a) INTUICIÓN:

b) TEORÍA:

c) MATRACA:

P4. sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)} & \text{si } x > 0 \\ (x - \alpha)^2 & \text{si } x < 0 \\ \beta & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Encuentre todos los valores de α y β para los cuales f es continua en todo $\mathbb{R}$.

a) INTUICIÓN:

b) TEORÍA:

c) MATRACA:

P5. Una función se denomina función de Lipschitz, si cumple con:

$$\exists L > 0, \forall x, y \in \operatorname{Dom}(f), |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

Demuestre que si f es Lipschitz, entonces es continua.

P6. Sea $S_n = \arctg(n! \cdot e^n \cdot \cos(n^2))$, el objetivo es probar que existe al menos una subsucesión convergente.

a) INTUICIÓN:

b) TEORÍA:

c) MATRACA:

Propuestos

Recordo:

- Una sucesión es una función

$$s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto s(n) = s_n$$

- $s_n \rightarrow \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |s_n - \ell| \leq \varepsilon$

- (s_n) se dirá acotada si $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |s_n| \leq M$

- Sea (s_n) una sucesión y sea $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una función estrictamente creciente. Se llama subsucesión de s_n generada por φ , a la sucesión $s_{\varphi(n)}$

- Sea (s_n) una sucesión y sea $\ell \in \mathbb{R}$. Entonces $s_n \rightarrow \ell \iff$ Todas las subsucesiones de (s_n) convergen a ℓ

- Teorema de Bolzano - Weierstrass**

Toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergente

- Función continua en un punto**

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in A$. Diremos que f es una función continua en $\bar{x}$ si

$$\forall (x_n) \subseteq A, x_n \rightarrow \bar{x} \implies f(x_n) \rightarrow f(\bar{x})$$

- Caracterización $\varepsilon - \delta$**

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in A$. f es continua

$$s_n \rightarrow \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq n_0, |s_n - \ell| < \varepsilon$$

$$M \leq s_n \leq 6$$

$$M := \max\{|6|, |n|\}$$

en $\mathbb{R}$ si y solo si se cumple que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A$

$$\{|x - \bar{x}| \leq \delta \implies |f(x) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon\}$$

- Álgebra de funciones continuas**

Sean $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuas en $\bar{x} \in A \cap B$. Luego $\lambda f + g, \lambda f$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \cdot g, \frac{f}{g}$ con $g(\bar{x}) \neq 0$. Además la composición de continuas es continua

- Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si f es continua $\forall \bar{x} \in A$, diremos que f es continua.

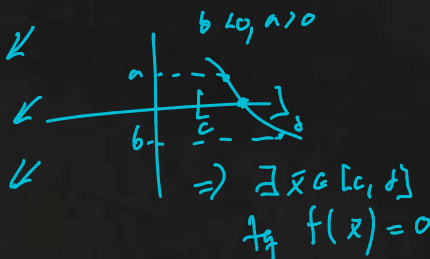
- [TVI o Bolzano]** Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)f(b) \leq 0$. Entonces existe $\bar{x} \in [a, b]$ tal que $f(\bar{x}) = 0$.

- [TVI-Generalizado]** Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Si $c, d \in f([a, b])$. Entonces $\forall x_0 \in [c, d], \exists \bar{x} \in [a, b]$ tal que $f(\bar{x}) = x_0$

- [Teorema de Weierstrass]**

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es acotada y alcanza su mínimo y su máximo en $[a, b]$.

- Sea $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y estrictamente monótona (creciente o decreciente) con I un intervalo. Entonces $J = f(I)$ es un intervalo y la inversa $f^{-1}: J \rightarrow I$ es continua.



P1. Calcule los siguientes limites, inserte hipótesis(ale):

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n!}{(n!)!}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} (2)^{n \cdot 2^{-n}}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3n^2 + 2}\right)^{4n^2}$$

- a) INTUICIÓN: Recordar $s_n \rightarrow \ell \iff$ Toda subsucesión $s_{\varphi(n)} \rightarrow \ell$
- b) TEORÍA: $\rightarrow$
- c) MATRACA:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n!}}{(n!)!}$; Defimo $\ell(n): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $\ell(n) := n!$

$$\ell(n) - \ell(n+1) = n! - (n+1)! = n!(-n) < 0$$

$$\implies \ell(n) - \ell(n+1) < 0$$

$$\ell(n) < \ell(n+1) \implies \text{Estrictamente Creciente}$$

Defimo $s_n = \frac{3^{n!}}{(n!)!} = \frac{3^{\ell(n)}}{\ell(n)!} = s_{\ell(n)}$

Estudio $s_k = \frac{3^{k!}}{k!} \rightarrow$ TEO Sándwich

$$0 \leq \frac{3^{k!}}{k!} = \frac{3^k}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} \leq \frac{3^k}{1 \cdot 2 \cdot 3^{k-3} \cdot k} = \frac{3^3}{9 \cdot k} \rightarrow 0$$



a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n!}{(n!)!}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2)^{n \cdot 2^{-n}}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3n^2 + 2}\right)^{4n^2}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{n \cdot 2^{-n}}$

$\ell(m) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$\ell(m) = 2^m$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{(n \cdot \frac{1}{2^n})}$

$\frac{\ell(m)}{\ell(m+1)} = \frac{2^m}{2^{m+1}} = \frac{1}{2} < 1$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} (2^n)^{\frac{1}{2^n}}$

$\Rightarrow \ell(m)$ creciente, $\forall m \in \mathbb{N}$ estricto

$\Rightarrow S_n = (2^n)^{\frac{1}{2^n}} = (\ell(m))^{\frac{1}{\ell(m)}}$

$\ell(m) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$k^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{k} \rightarrow 1$

$\nparallel$ Teo Sándwich.

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (2^n)^{\frac{1}{2^n}} \rightarrow 1$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3n^2 + 2}\right)^{4n^2}$

$\nparallel$ El límite existe

$S_n \rightarrow l \Leftrightarrow$ TODA subsecuencia $(S_{n_k})_k \rightarrow l$

$\nparallel$ se parece a la definición función

Exponencial $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$

Subsecuencia $\rightarrow$ función estricta creciente en los índices.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3n^2 + 2}\right)^{4n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{3n^2 + 2}\right)^{\frac{4n^2}{3n^2 + 2}} \right]^{\frac{3n^2 + 2}{3n^2 + 2}}$

$a^b = \exp(\ln(a^b)) = \exp(b \ln(a))$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2}{3n^2 + 2} \cdot \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{3 + \frac{2}{n^2}} = \frac{4}{3}$

(1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3n^2+2} \right)^{3n^2+2} = a_n$$

$$f(n) = 3n^2 + 2$$

$$\underline{f(n+1) - f(n)} = 3(n+1)^2 + 2 - 3n^2 - 2$$

$$= 3n^2 + 6n + 3 - 3n^2$$

$$= 6n + 3 > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow f(n)$ es estricta creciente $\downarrow$

$$a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3n^2+2} \right)^{3n^2+2}$$

$$a_{f(n)} = \lim_{f(n) \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{f(n)} \right)^{f(n)}$$

$$\underbrace{f(n)}_{K \in \mathbb{N}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$x_1, \underbrace{x_2}, x_3, x_4, x_5, \underbrace{x_6}$$

$$x_7, x_8, x_9, \dots, \underbrace{x_{10}}$$

$$\begin{array}{ll} n=0 & \rightarrow 2 \\ n=1 & \rightarrow 5 \\ n=2 & \rightarrow 13 \\ n=3 & \rightarrow 29 \\ & \vdots \end{array}$$

$$(a_n)_K = \lim_{K \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{K} \right)^K = e^2 \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{3n^2+2} \right)^{3n^2+2} \right]^{\frac{4n^2}{3n^2+2}} = (e^2)^{\frac{4}{3}}$$

$\searrow e^2$

P2. Verifiquemos el valor de verdad

Dada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y con x_n una sucesión en $[a, b]$, entonces existe una subsucesión $x_{\phi(n)}$ y $x_1 \in [a, b]$ tal que $f(x_{\phi(n)}) \rightarrow f(x_1)$ con $n \rightarrow \infty$

PASOS PARA EL ÉXITO:

Convergencia

Acatado



fcfm

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Verificar valor de Verdad

Si Es Verdadero $\rightarrow$ lo pruebo para todos

Si Es falso $\rightarrow$ Encuentro un contraejemplo

Si Es Verdadero $\rightarrow$ NO Contrajo un caso particular

1) Lógica (proposiciones y Cuantificadores)

2) Ver que teorema se parece $\rightarrow$ Ver conceptos

3) Demostrar o Argumentar su valor de Verdad.

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua

$x_n \in [a, b]$ sucesión

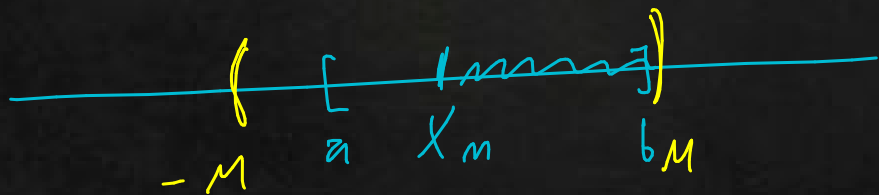
$$|x_n| \leq M$$

$$M = \max \{ |a|, |b| \}$$

$$a \leq x_n \leq b \leq |b|$$

$$a \leq x_n \leq b \downarrow$$

$$-M \leq x_n \leq M = \max \{ |a|, |b| \}$$



$$\Rightarrow x_n \in [-M, M] \Rightarrow |x_n| \leq M \Rightarrow x_n \text{ acatado}$$

Toda sucesión acatada posee al menos una subsucesión convergente

$$\Rightarrow \exists x_{p(m)} \rightarrow x, \forall x \in [a, b] \Rightarrow x = x_1$$

$$\Rightarrow \exists x_{q(m)} \rightarrow x_1, \# \text{ Recurrido}$$

$$\Rightarrow f(x_{q(m)}) \rightarrow f(x_1) \quad f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ continua}$$

$$\Leftrightarrow x_m \rightarrow \bar{x} \Rightarrow f(x_m) \rightarrow f(\bar{x})$$

$$\forall x_1 \in [a, b]$$

P3. Pruebe que las siguientes sucesiones no convergen:

a) $u_n = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$

b) $v_n = \left(-1 + \frac{1}{n}\right)^n$

a) INTUICIÓN:

b) TEORÍA:

c) MATRACA:

$$\underbrace{s_m \rightarrow l}_P \Leftrightarrow \underbrace{\text{ TODA subsección converge a } l}_Q$$

$$P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$$

$$s_m \rightarrow l \Rightarrow \text{ TODA subsección converge a } l$$

Caracterización de la implicación $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$

$$\Leftrightarrow Q \vee \neg P$$

$$\Leftrightarrow -Q \Rightarrow \neg P$$

$$s_m \rightarrow l \Rightarrow \text{ TODA subsección converge a } l$$

$$\Leftrightarrow \exists \text{ subsección que no converge a } l \Rightarrow s_m \not\rightarrow l$$

• diverger

• 2 subsección

$$\begin{array}{l} l_{(m)} \rightarrow l_1 \\ l_{(n)} \rightarrow l_2 \end{array} \quad l_1 \neq l_2$$

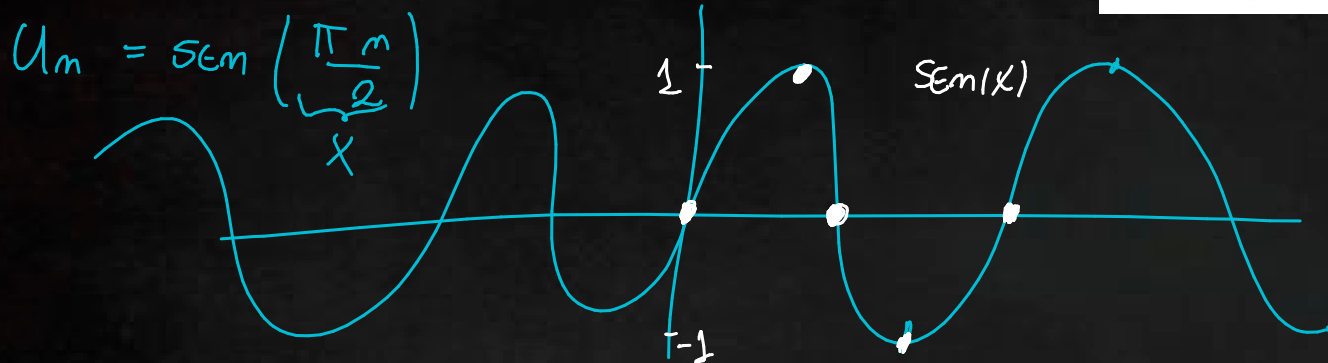
a)

P3. Pruebe que las siguientes sucesiones no convergen:

a) $u_n = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right)$

b) $v_n = \left(-1 + \frac{1}{n}\right)^n$

a) INTUICIÓN:



$$m=0 \Rightarrow u_m = \operatorname{sen}(0)$$

$$m=1 \Rightarrow u_m = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$m=2 \Rightarrow u_m = \operatorname{sen}(\pi)$$

$$m=3 \Rightarrow u_m = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

 $\vdots$

$$\operatorname{sen} m = 2k, k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow u_m = \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}(k\pi) = 0$$

$$\operatorname{sen} m = 2k+1$$

$$\Rightarrow u_m = \operatorname{sen}\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k$$

$$l(k_1) = 2k_1 \Rightarrow l(k_1+1) - l(k_1) = 2(k_1+1) - 2k_1 = 2 > 0$$

 $\Rightarrow l(k_1)$ creciente estricto

$$l(k_2) = 2k_1+1 \Rightarrow l(k_2+1) - l(k_2) = 2(k_2+1) + 1 - (2k_2+1)$$

$$= 2 > 0 \Rightarrow l(k_2)$$
 creciente estricto

 $l(k_1)$ sub sucesión $l(k_2)$ sub sucesióndonde $u_{l(k_1)} \rightarrow l_1 = 0$ $u_{l(k_2)} \rightarrow l_2 = (-1)^k$ con $l_1 \neq l_2$ $\therefore u_m$ no converge

fcfm

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

$$b) v_n = \left(-1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$



fcfm

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

$$V_n = \left(-1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$= \left((-1) \left[1 + \frac{-1}{n}\right]\right)^n = (-1)^n \left(1 + \frac{-1}{n}\right)^n$$

$$\ell(n_1) = 2n_1 \quad \text{creciente estricto}$$

$$\Rightarrow V_{\ell(n_1)} = \cancel{(-1)^{2n_1}} \left(1 + \frac{-1}{2n_1}\right)^{2n_1} = \left(1 + \frac{-1}{2n_1}\right)^{2n_1}$$

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} V_{\ell(n_1)} = \lim_{n_1 \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{2n_1}\right)^{2n_1} = e^{-1} = l_1 \quad \left(\frac{1}{e} \approx 0.3679\right)$$

$$\ell(n_2) = 2n_2 + 1 \quad \text{creciente estricto}$$

$$\lim_{n_2 \rightarrow \infty} V_{\ell(n_2)} = \lim_{n_2 \rightarrow \infty} \underbrace{(-1)^{2n_2+1}}_{-1} \underbrace{\left(1 + \frac{-1}{(2n_2+1)}\right)^{(2n_2+1)}}_{\frac{1}{e} \approx 0.3679} = -1 \cdot e^{-1} = l_2$$

$$l_1 \neq l_2 \Rightarrow V_n \text{ no converge.}$$



P4. sea f la función definida por

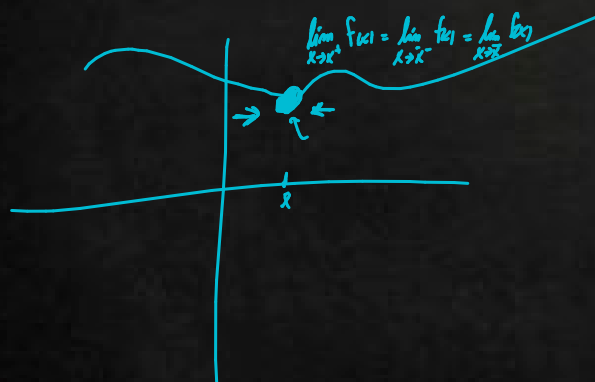
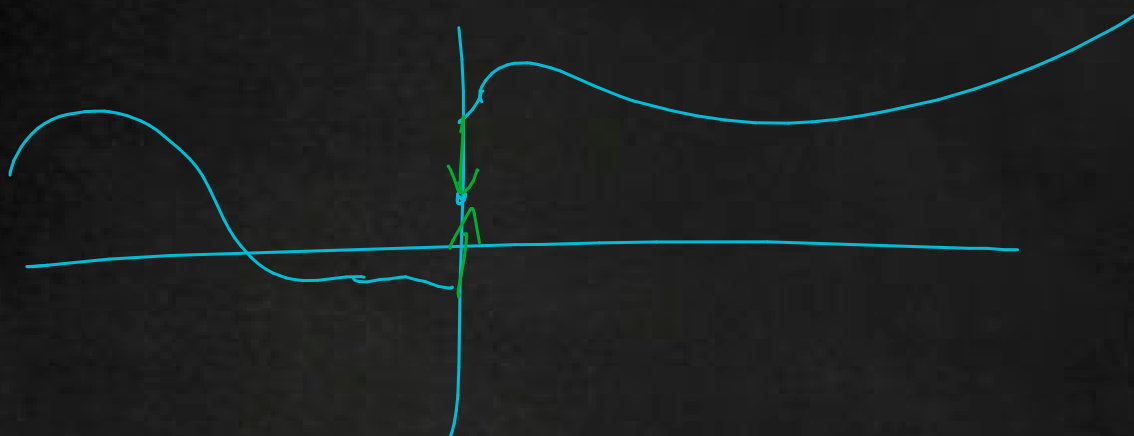
$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)} & \text{si } x > 0 \\ (x - \alpha)^2 & \text{si } x < 0 \\ \beta & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Encuentre todos los valores de α y β para los cuales f es continua en todo $\mathbb{R}$.

a) INTUICIÓN:

b) TEORÍA:

c) MATRACA:



• Por algebra y composicion de funciones continuas segun

continua en su dominio

a excepcion del 0, por que?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{\ln(x+1)} & \text{si } x > 0 \\ (x-2)^2 & \text{si } x < 0 \\ \beta & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

$$\begin{array}{c} \rightarrow \\ (1) \quad 0 \end{array}$$

$$(\infty) \swarrow$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-2)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

$$(\infty) \swarrow$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{\ln(x+1)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-2)^2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{\ln(x+1)}$$

$$\# (e^x - 1)' = (e^x)' - \underbrace{(1)'}_0 = e^x$$

L'Hôpital

$$(-2)^2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{\frac{1}{(x+1)} \cdot 1}$$

$$(\ln(h))' = \frac{1}{h}$$

$$(-2)^2 = \frac{e^0}{1} = 1 //$$

$$(x+1)' = x' + (1)' = 1 + 0 = 1$$

$$\Rightarrow \text{M.W. } \boxed{(-2)^2 = 1} \Rightarrow \frac{1}{1+0} \Rightarrow \beta = 1$$

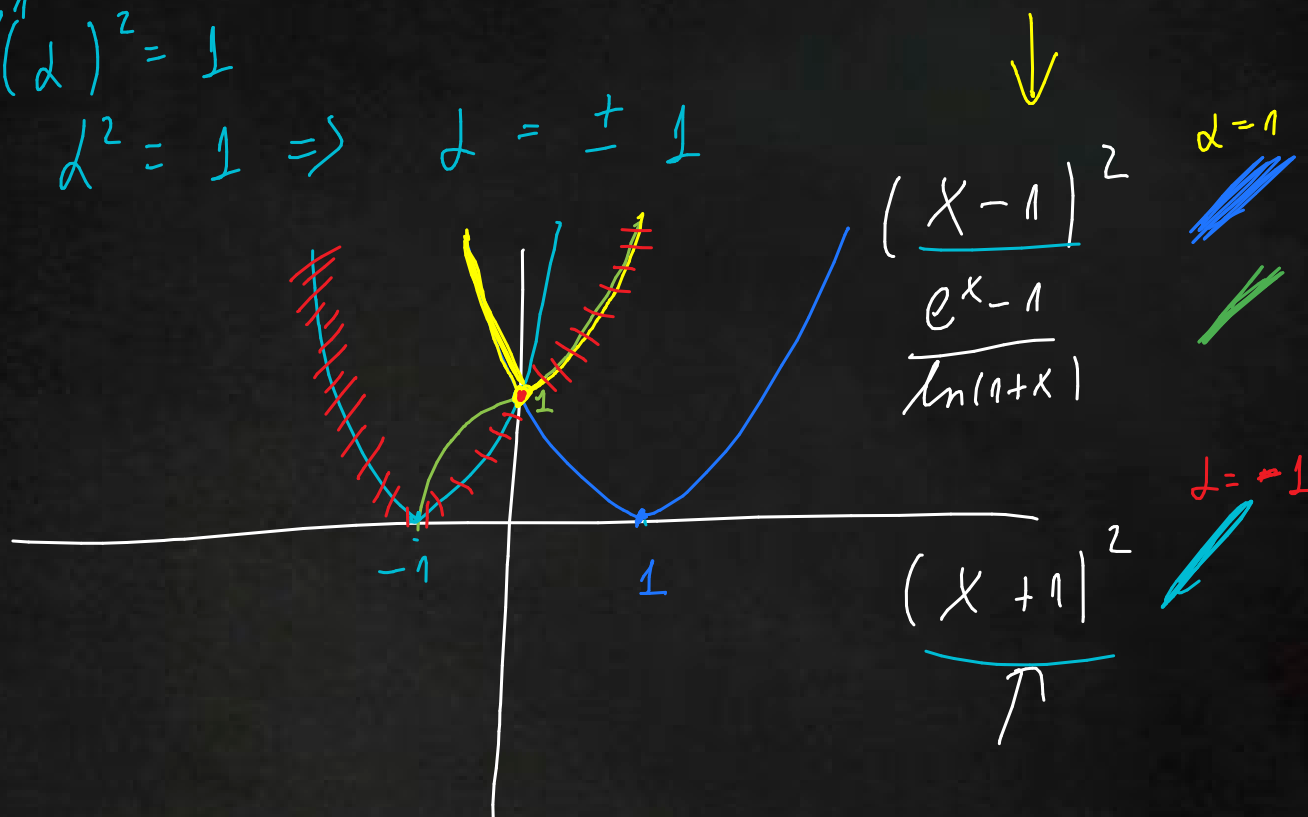
M.W

$$(-2)^2 = 1$$

$$((-1)(2))^2 = 1$$

$$(-1)^2 (2)^2 = 1$$

$$2^2 = 1 \Rightarrow 2 = \pm 1$$



P5. Una función se denomina función de Lipschitz, si cumple con:

$$\exists L > 0, \forall x, y \in \text{Dom}(f), |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

Demuestre que si f es Lipschitz, entonces es continua.

$(P) \Rightarrow Q$

$x_n \rightarrow \bar{x} \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(\bar{x})$ Nos sirve esta caracterización

$\epsilon - \delta$
 $(\Rightarrow) \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon \Leftrightarrow \text{continua}$

Enumerando $\exists L \geq 0$ t.q. $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \forall x, y$

1) $L = 0 \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 0 \cdot |x - y| = 0$

$\Leftrightarrow |f(x) - f(y)| \leq 0 \Leftrightarrow |f(x) - f(y)| = 0$; $1 \cdot 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow |f(x) - f(y)| = 0 \Leftrightarrow f(x) - f(y) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(y)$

$\forall x, y \in \text{Dom}(f) \Rightarrow f$ constante $\forall x, y \Rightarrow \text{continua} //$

$$2) L \neq 0$$

$$\exists L > 0, \forall x, y \in \text{Dom}(f), |f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad (1)$$

Queremos continuidad $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon), \underline{|x - y| < \delta} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

$$\text{Definimos } \delta = \frac{\varepsilon}{L}, \quad |x - y| < \delta = \frac{\varepsilon}{L}$$

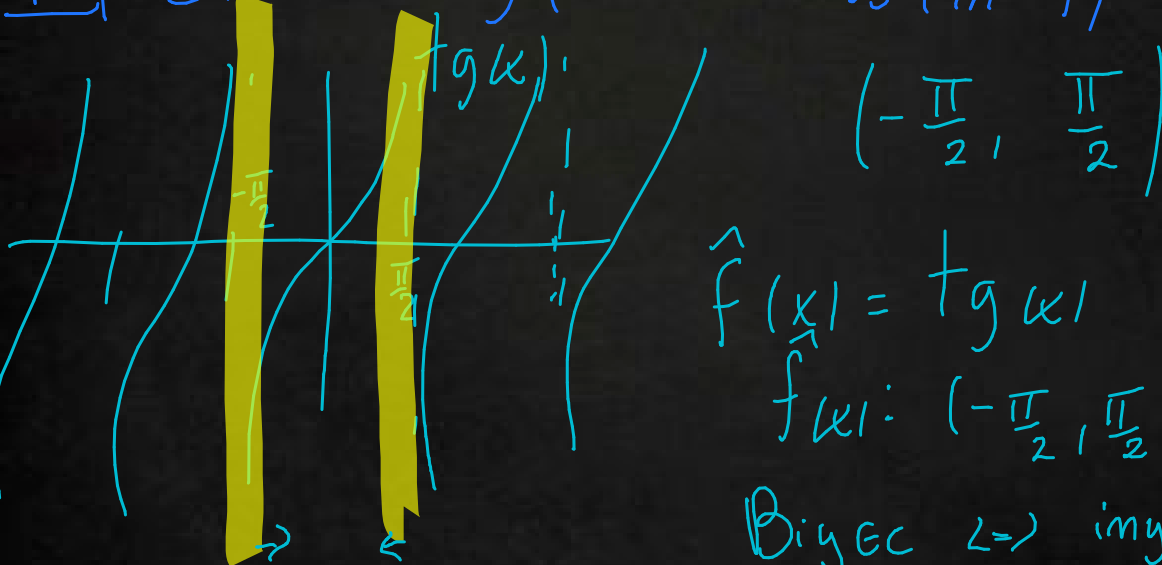
$$|x - y| < \frac{\varepsilon}{L} \quad (*)$$

$$(1) \quad |f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \downarrow \quad (1) \\ \leq L \cdot \frac{\varepsilon}{L}, \quad L > 0$$

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

$\therefore f$ continua.

P6] $S_m = \arctg(m! \cdot e^m \cos(m^2))$



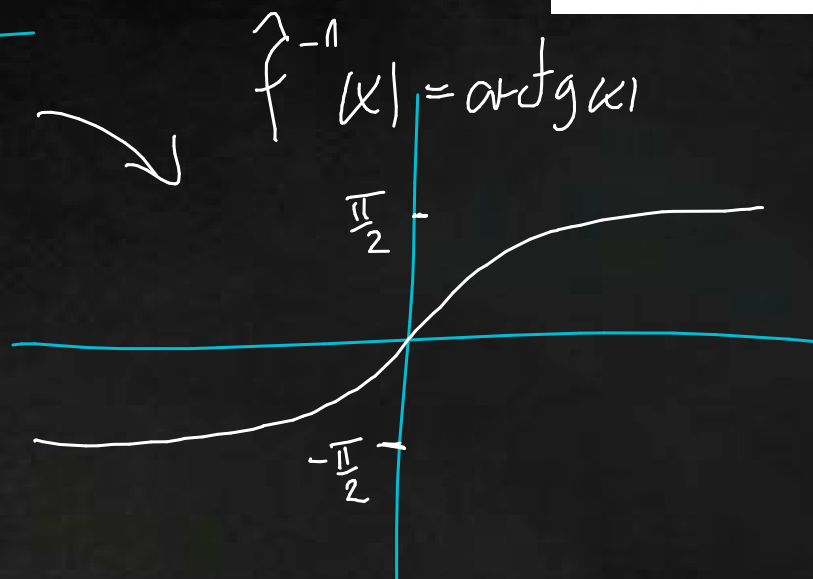
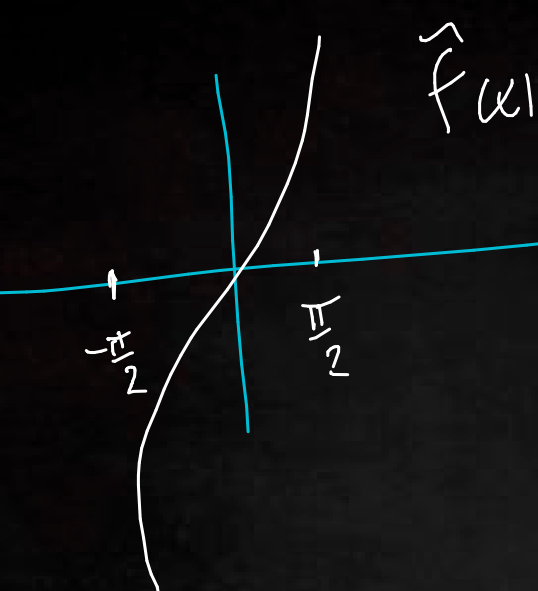
$$\hat{f}(x) = \text{tg}(x)$$

$$f(x): (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$$

Biyección $\Leftrightarrow$ inyectiva y sobreyectiva

$$\arctg(x)$$

$$\hat{f}^{-1}(x): \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$



$$-\frac{\pi}{2} < \arctg(x) < \frac{\pi}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Si } x = n! \cdot e^n \cos(n^2) \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \arctg(n! \cdot e^n \cos(n^2)) < \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow |\arctg(n! \cdot e^n \cos(n^2))| < \frac{\pi}{2} = M$$

$$|S_n| < M \Rightarrow S_n \text{ acotada}$$

Si X_n acotada $\Rightarrow \exists$ al menos una subsecuencia convergente

$\Rightarrow \exists$ al menos una subsecuencia convergente.
T.B.-W



Espero que haya
quedado todo claro!!!

Nos vemos en el próximo
auxiliar!!

Cualquier duda

1) pyamoz@dim.uchile.cl

2) Foto! Así te queda sirve a los
demás

3) Que tengam linda semana PataAux

P1. Sean $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ y $b \in \mathbb{R}$. Considere la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}((1-a)x)}{x} & \text{si } x < 0 \\ b(x-a)^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\operatorname{sen}(a(x-1))}{\ln(x)} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- 1) ¿Es f continua en los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$?
- 2) Encuentre una relación entre a y b de tal forma que f sea continua en 0
- 3) Encuentre una relación entre a y b de tal forma que f sea continua en 1
- 4) Encuentre los valores de a y de b de tal forma que f sea continua en todo $\mathbb{R}$

P2. Demuestre que si $g : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ es continua y $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$ entonces toda sucesión (x_n) en $\mathbb{R}$ posee al menos una subsucesión $(x_{\varphi(n)})$ tal que $g(x_{\varphi(n)})$ converge

Ind: Pruebe previamente que g es acotada y aplique apropiadamente Bolzano-Weierstrass

P3. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y sea (a_n) una sucesión en $[a, b]$ (no necesariamente convergente) tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \ell$. Demuestre que existe un $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = \ell$

P4. Considere una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, con un mínimo global único en el punto $\bar{x}$ y que satisface $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$

Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión que tiene la propiedad

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) \leq f(\bar{x}) + \frac{1}{n}$$

- 1) Pruebe que si la subsucesión $(x_{\varphi(n)})$ converge a $\ell \in \mathbb{R}$ entonces $\ell = \bar{x}$
- 2) Pruebe que (x_n) tiene alguna subsucesión que converge a $\bar{x}$

Auxiliar 1: EL REGRESO



Figura 1: Será memorable

“-Ey, doc, es mejor que nos retractemos. No tenemos suficiente carretera para llegar a los 140 kilómetros por hora. -Marty.

*-¿Carreteras? A donde vamos no necesitamos carreteras. -Dr. Emmet.”
Volver al futuro*