

MA1002-2 Cálculo Diferencial e Integral Verano 2023, Primavera

Profesor: Leonardo Sánchez C.

Auxiliar: Patricio Yáñez A.

Consultas: pyanez@dim.uchile.cl



Auxiliar 01: Continuidad de sus secciones, serán sus sesiones de sucesiones 2.0

13 de Diciembre 2022

Recuerdo:

- Una **sucesión** es una función

$$s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto s(n) = s_n$$

- $s_n \rightarrow \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |s_n - \ell| \leq \varepsilon$

- (s_n) se dirá acotada si $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |s_n| \leq M$

- Sea (s_n) una sucesión y sea $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una función *estrictamente creciente*. Se llama **subsucesión** de s_n generada por φ , a la sucesión $s_{\varphi(n)}$

- Sea (s_n) una sucesión y sea $\ell \in \mathbb{R}$. Entonces

$$s_n \rightarrow \ell \iff \text{Todas las subsucesiones de } (s_n) \text{ convergen a } \ell$$

- Teorema de Bolzano - Weierstrass**

Toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergente

- Función continua en un punto**

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in A$. Diremos que f es una **función continua** en \bar{x} si

$$\forall (x_n) \subseteq A, x_n \rightarrow \bar{x} \implies f(x_n) \rightarrow f(\bar{x})$$

- Caracterización $\varepsilon - \delta$**

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in A$. f es continua

en \bar{x} si y solo si se cumple que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A$

$$\{|x - \bar{x}| \leq \delta \implies |f(x) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon\}$$

- Álgebra de funciones continuas**

Sean $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $g: B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuas en $\bar{x} \in A \cap B$. Luego $f \pm g, \lambda f$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \cdot g, \frac{f}{g}$ con $g(\bar{x}) \neq 0$. Además la composición de continuas es continua

- Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si f es continua $\forall \bar{x} \in A$, diremos que f es continua.

- [TVI o Bolzano]** Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)f(b) \leq 0$. Entonces existe $\bar{x} \in [a, b]$ tal que $f(\bar{x}) = 0$.

- [TVI-Generalizado]** Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Si $c, d \in f([a, b])$. Entonces $\forall x_0 \in [c, d], \exists \bar{x} \in [a, b]$ tal que $f(\bar{x}) = x_0$

- [Teorema de Weierstrass]**

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es acotada y alcanza su mínimo y su máximo en $[a, b]$.

- Sea $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y estrictamente monótona (creciente o decreciente) con I un intervalo. Entonces $J = f(I)$ es un intervalo y la inversa $f^{-1}: J \rightarrow I$ es continua.

P1. Calcule los siguientes límites

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2)^{n \cdot 2^{-n}}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n!}}{(n!)!}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3n^2 + 2}\right)^{4n^2}$

P2. Verifiquemos el Valor de verdad

Dada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua con x_n una sucesión en $[a, b]$, entonces existe una subsucesión $x_{\phi(n)} \wedge x_1 \in [a, b]$ tal que $f(x_{\phi(n)}) \rightarrow f(x_1)$

P3. Pruebe que las siguientes sucesiones no convergen:

a) $u_n = \text{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right)$

b) $v_n = \left(-1 + \frac{1}{n}\right)^n$

P4. sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)} & \text{si } x > 0 \\ (x - \alpha)^2 & \text{si } x < 0 \\ \beta & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Encuentre todos los valores de α y β para los cuales f es continua en todo \mathbb{R} .

P5. Una función se denomina función de Lipschitz, si cumple con:

$$\exists L > 0, \forall x, y \in \text{Dom}(f), |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

Demuestre que si f es Lipschitz, entonces es continua.

P6. Sea $S_n = \text{arctg}(n! \cdot e^n \cdot \cos(n^2))$, el objetivo es probar que existe al menos una subsucesión convergente.

Propuestos

P1. Sean $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ y $b \in \mathbb{R}$. Considere la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}((1-a)x)}{x} & \text{si } x < 0 \\ b(x-a)^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\text{sen}(a(x-1))}{\ln(x)} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- 1) ¿Es f continua en los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$?
- 2) Encuentre una relación entre a y b de tal forma que f sea continua en 0
- 3) Encuentre una relación entre a y b de tal forma que f sea continua en 1
- 4) Encuentre los valores de a y de b de tal forma que f sea continua en todo \mathbb{R}

P2. Demuestre que si $g : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ es continua y $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$ entonces toda sucesión (x_n) en \mathbb{R} posee al menos una subsucesión $(x_{\phi(n)})$ tal que $g(x_{\phi(n)})$ converge

Ind: Pruebe previamente que g es acotada y aplique apropiadamente Bolzano-Weierstrass

P3. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y sea (a_n) una sucesión en $[a, b]$ (no necesariamente convergente) tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \ell$. Demuestre que existe un $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = \ell$

P4. Considere una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, con un mínimo global único en el punto \bar{x} y que satisface $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$

Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión que tiene la propiedad

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) \leq f(\bar{x}) + \frac{1}{n}$$

- 1) Pruebe que si la subsucesión $(x_{\varphi(n)})$ converge a $\ell \in \mathbb{R}$ entonces $\ell = \bar{x}$
- 2) Pruebe que (x_n) tiene alguna subsucesión que converge a \bar{x}



Figura 1: y bueno, quién tiene hambre

*“Con el sueño haz de ser moderado, porque quien no madruga con el sol, no goza del día..”
Don Quijote de la Mancha-Miguel de Cervantes*