MA1001 Introducción al Cálculo

Auxiliar $\#2$ - Continuidad y continuidad uniforme de funciones

Profesor: Leonardo Sanchez. **Auxiliar:** Patricio Yañez. **Reemplazo:** Manuel Torres[1].

P1.- *Composición de funciones continuas:* Demuestre que la función $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ es continua sobre el intervalo $[-1, 1]$.

P2.- *Ejemplos de funciones continuas:* Determine el dominio de las siguientes funciones, luego explique por qué cada una de las siguientes funciones es continua en todo punto de su dominio.

a) $a(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 + 1}$

b) $b(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x - 2}}{x^3 - 2}$

c) $c(x) = \arcsin(1 + 2x)$

d) $d(x) = \sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}$

e) $e(x) = \dfrac{x^2 + 1}{2x^2 - x - 1}$

f) $f(x) = \dfrac{e^{\sin(x)}}{2 + \cos(\pi x)}$

g) $g(x) = \dfrac{\tan(x)}{\sqrt{4 - x^2}}$

P3.- *Continuidad de función definida mediante un límite sobre un parámetro:* Considere la función

$$f(x) := \lim_{y \to 0} \frac{e^y + \operatorname{sen}(x) - 1}{x + y}$$

Determine $f(0)$, calcule el valor de $f(x)$ para $x \neq 0$ y además estudie la continuidad de f en todo $\mathbb{R}$.

P4.- *Reparación de discontinuidades:* ¿Cuál de las funciones f siguientes tiene discontinuidad removible en $x = a$? Si la discontinuidad es removible, determine una función g que concuerde con f para $x \neq a$ y sea continua en $x = a$.

a) $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}$, $a = 1$.

b) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{x - 2}$, $a = 2$.

P5.- *Aplicación del teorema del valor intermedio:*

a) *Existencia de punto fijo:* Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ una función continua y sobreyectiva. Demuestre que existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = x_0$.

b) Demuestre que la ecuación $x^5 + x^3 - 1 = 0$ tiene al menos una solución real.

c) Muestre que:

[1] Contacto: manuel.torres@ug.uchile.cl

1) La función $f(x) = xe^{x-1} - \frac{1}{2}$ tiene un cero en $[0, 1]$.
2) La expresión $x^4 = 2^x$ admite al menos una solución real.
3) La ecuación $x^3 + x + 1 = 0$ tiene al menos una solución real. Además encuentre un intervalo de largo a lo más $\frac{1}{2}$ que contenga la solución.
4) $p(x) = 0$ tiene por lo menos una solución real, con $p(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomio de grado impar.

P6.- *Aplicación del teorema de Bolzano:* Sean $f, g : [0, 1] \to [0, 1]$ funciones continuas y epiyectivas. Demuestre que existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = g(c)$.

P7.- *Aplicación del teorema de Weiestrass:* Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$.

a) Pruebe que existen $\underline{x}, \overline{x} \in [a, b]$ tales que

$$f(\underline{x}) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leq f(\overline{x}), \forall x_1, x_2 \in [a, b]$$

b) Demuestre que dados $x_1, x_2 \in [a, b]$ cualesquiera existe $\beta \in [a, b]$ tal que

$$f(\beta) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

P8.- *Continuidad uniforme:*

a) Estudie la continuidad uniforme en $(0, 1)$ de las siguientes funciones:

1) $f(x) = x \sin(1/x)$.
2) $f(x) = e^x \cos(1/x)$.

b) Sean f, g, h funciones cuya regla de asignación viene dada por:

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \lfloor x \rfloor \\ g(x) &= \sin(\pi f(x)) \\ h(x) &= \cos(\pi f(x)) \end{aligned}$$

1) Estudie la continuidad y continuidad uniforme de $g(x)$ y $h(x)$ en $\mathbb{R}$.
2) Estudie la continuidad y continuidad uniforme de $g(x)$ y $h(x)$ en $[0, 1)$.
3) Sea H el conjunto de puntos de discontinuidad de f. Muestre que $|H| = |\mathbb{N}|$.