Semana 1 12/12/2022

Subsucesiones

Def: Sea (S_n) una sucesión y $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tq $n \to f(n)$ una función estrictamente $\nearrow$. Se llama subsucesión de (S_n) a la sucesión (U_n) definida por $U_n = S_{f(n)}$

* Toda sucesión es subsucesión de sí misma.

Una cantidad de números puede no estar definida
$f: A \subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$n \longmapsto f_{(n)} = n - 5$

Ejemplo: Si $f(n) = 2n$, $S_{(f(n))} = (S_0, S_2, S_4, S_6 \dots S_{2n})$

$f(n) = 2n+1$, $S_{(f(n))} = (S_1, S_3, S_5, S_7 \dots S_{2n+1})$

Teorema: Sea (S_n) una sucesión y sea $L \in \mathbb{R}$. Entonces $S_n \to L \Leftrightarrow$ Todas las subsucesiones de (S_n) convergen a L

$\hookrightarrow |S_{f(n)} - L| \leq \varepsilon$

* Recordar: $S_n \to L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \quad |S_n - L| \leq \varepsilon$

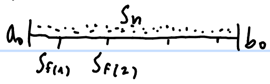
PDQ: $\exists k_0, \forall k \geq k_0 \quad |S_{f(k)} - L| < \varepsilon$

Entonces $\forall k \geq k_0 \Rightarrow f(k) \geq f(k_0) \geq n_0$

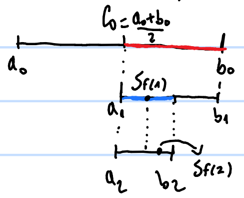
$\Rightarrow |S_{f(k)} - L| \leq \varepsilon \quad // \quad \Rightarrow S_{f(k)} \to L$

Teorema (Bolzano-Weierstrass): Toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergente.

Dem: Sean a_0, b_0, $a_0 < b_0$ tq $S_n \in [a_0, b_0]$ $\forall n$



Usando Método de Dicotomía



$I_0 = [a_0, b_0]$ mide $b_0 - a_0$

$I_1 = [a_1, b_1] \wedge b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}$

$I_2 = [a_2, b_2] \wedge b_2 - a_2 = \frac{b_0 - a_0}{2^2}$

$\vdots$

$I_n = [a_n, b_n] \wedge b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$ *

$\to$ Teorema de los intervalos encajonados ojo

$I_n \subseteq I_{n-1} \subseteq \dots \subseteq I_1 \subseteq I_0$

Definamos la siguiente subsucesión de S_n

$(S_{f(n)})$ $\quad f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$\quad n \to f(n)$

$f(1) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid S_k \in I_1\}$

$f(2) = \min\{k > f(1) \mid S_k \in I_2\}$

$f(3) = \min\{k > f(2) \mid S_k \in I_3\}$

$\vdots$

$f(n) = \min\{k > f(n-1) \mid S_k \in I_n\}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{f(n)} \in I_n \in I[a_n, b_n]$ y sea $a_n \leq S_{f(n)} \leq b_n$ **

Además (a_n) y (b_n) son convergentes por Teo. suc. monótonas

$\Rightarrow$ tq $a_n \to a$, $b_n \to b$. Además de * en el límite queda

$\lim(b_n - a_n) = \lim \frac{b_0 - a_0}{2^n} \Leftrightarrow \lim (b_0 - a_0) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

$\Rightarrow b - a \qquad = 0 \quad \Rightarrow \boxed{a = b = L}$

Luego tomando límite a ** Por T. del Sandwich

$$\begin{array}{ccccc} a_n & \leq & S_{f(n)} & \leq & b_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ L & & L & & L \end{array}$$

$\therefore$ La subsucesión converge //

Continuidad

e^x, $\ln(x)$, $\operatorname{sen}(x)$, $\cos(x)$

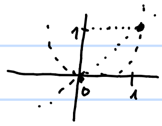
$\lim(x_n) = \bar{x} \Rightarrow \lim f(x_n) = f(\lim(x_n))$

Def: Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in A$. Diremos que f es continua en $\bar{x}$ si $\forall (x_n) \subseteq A$, $x_n \to \bar{x} \Rightarrow f(x_n) \to f(\bar{x})$

Ej: Sea $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x^2 & \text{si } x \in \mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ $\quad : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1) f es continua en $\bar{x} = 0 \wedge \bar{x} = 1$

2) f No es continua $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$



• En $\bar{x} = 0$ $\quad f(\bar{x}) = f(0) = 0$

Sea $x_n \to 0$

$f(x_n) = \begin{cases} x_n \\ x_n^2 \end{cases}$ $\Rightarrow 0 \leq |f(x_n)| \leq |x_n| + x^2$ (acotando)

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \leq & |f(x_n)| & \leq & |x_n| + x^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Luego $f(x_n) \to 0 = f(0)$

• En $\bar{x} = 1$ $\quad f(1) = 1$

$f(x_n) = \begin{cases} x_n & x_n \in \mathbb{Q} \\ x_n^2 & x_n \in \mathbb{I} \end{cases} \Rightarrow |f(x_n) - 1| = \begin{cases} |x_n - 1| & \text{en } \mathbb{Q} \\ |x_n^2 - 1| & \text{en } \mathbb{I} \end{cases}$

$$\begin{array}{ccccc} \Rightarrow 0 & \leq & |f(x_n) - 1| & \leq & |x_n - 1| + |x_n^2 - 1| \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

$f(x_n) - 1 \to 0$
$f(x_n) \to 1 = f(1)$

Supongamos $\bar{x} \in \mathbb{Q} \setminus \{0, 1\}$ y sea $x_n \to \bar{x}$ $\qquad$ PDQ: $f(x_n) \to f(\bar{x})$

Sea $x_n = \bar{x} + \frac{\sqrt{2}}{n} \to \bar{x}$

$f(x_n) = \left(x_n + \frac{\sqrt{2}}{n}\right)^2 \to x^2 + \bar{x}$

es discontinua

Algunas funciones continuas:

1) $f(x) = c$ es continua en $\mathbb{R}$ 3) $\operatorname{sen}(x)$ 5) e^x $|e^{x_n} - e^{\bar{x}}| = e^{\bar{x}} \cdot |\overbrace{e^{x_n - \bar{x}}}^{\text{nula}} - 1| \to 0$ luego $e^{x_n} \to e^{\bar{x}}$

2) $f(x) = x$ (id) " " " " 4) $\cos(x)$ 6) $\ln(x)$

Teorema (Álgebra de continuas): Sean $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g: B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $\bar{x} \in A \cap B$. Entonces también son continuas en $\bar{x}$ $f \pm g$, $f \cdot g$, λf ($\lambda \in \mathbb{R}$), f/g $g(\bar{x}) \neq 0$

Dem para $f+g$: Sea $x_n \in A \cap B$ $\wedge$ $x_n \to \bar{x} \in A \cap B$ $\qquad *\ x^x = e^{x \ln(x)}$

Entonces $\underline{(f+g)(x_n)} = f(x_n) + g(x_n) \to f(\bar{x}) + g(\bar{x}) = \underline{(f+g)(\bar{x})}$

Teorema (Composición de continuas): Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g: B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas:

Si f es continua en $\bar{x} \in A$ y g es continua en $f(\bar{x}) \in B$ entonces $g \circ f$ es continua en $\bar{x}$, ie $x_n \to \bar{x} \Rightarrow (g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(\bar{x})$

Son continuas: 1) $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 \dots + a_n \cdot x^n$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (polinomios)

2) $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \dots a_n \cdot x^n / b_0 + b_1 \cdot x + \dots + b_n \cdot x^n$, $\forall x \in \mathbb{R} \in \operatorname{Dom} f$ (cociente de polinomios)

3) $f(x) = a^x$, $a > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $(e^{\ln a^x} = e^{x \ln a})$

4) $f(x) = \log_a(x) \iff \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$ $\forall x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$

5) $f(x) = x^x \iff e^{x \ln x}$ en $\mathbb{R}^+$ y 0^+

6) $f(x) = \tan(x) \iff \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x = (2k+1)\frac{\pi}{2}\}$

Teorema (Caracterización ε-δ de la continuidad): Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in A$

f es continua en $\bar{x}$ ssi

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A$ $\{\underbrace{|x - \bar{x}| \le \delta}_{x \in [\bar{x}-\delta,\, \bar{x}+\delta]} \Rightarrow \overbrace{|f(x) - f(\bar{x})| \le \varepsilon}^{f(x) \in [f(\bar{x}) - \varepsilon,\, f(\bar{x}) + \varepsilon]}$

Por contradicción

Dem: $\Rightarrow$) Supongamos que f es continua en $\bar{x}$ pero la propiedad no es cierta $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in A$ tq $|x - \bar{x}| \le \delta$ $\wedge$ $|f(x) - f(\bar{x})| \ge \varepsilon$

Sea $\delta = \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$ entonces $\exists x_n \in A$ tq $\underbrace{|x_n - \bar{x}| \le \frac{1}{n}}$ $\wedge$ $|f(x_n) - f(\bar{x})| > \varepsilon$ pues $f(x_n) \not\to f(\bar{x})$, $\varepsilon > 0$

$x_n \to \bar{x}$ relajando $\bar{x} - \frac{1}{n} \le x_n \le \bar{x} + \frac{1}{n}$

$\bar{x} \qquad x_n \qquad \bar{x}$

Entonces $f(x)$ es continua en $\bar{x} \iff \lim_{x \to \bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$

$\iff \lim_{h \to 0} f(\bar{x} + h) = f(\bar{x})$