2022-3 FI1100-1 Introducción a la Física Moderna
Profesor: Simón Riquelme Muñoz
Auxiliar: Camilo Núñez Barra
Ayudante: Camila Pulgarés Muñoz

Pauta Auxiliar 10

20 de enero de 2023

P1. Longitud de onda del fotón y electrón

Use la relación relativista entre E y p para mostrar que electrones y fotones con la misma energía E tienen distintas longitudes de onda. (Nota: Incluso a energía relativistas la relación de de Broglie $\lambda = h/p$ es correcta.) Muestre que las longitudes de onda tienden a ser iguales cuando E es mucho más grande que $m_e c^2$.

La relación de dispersión relativista para una partícula de energía E, momentum p y masa en reposo m_0 es

$$E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2. \tag{1.1}$$

Luego, si la energía $E = \sqrt{(p_e c)^2 + (m_e c^2)^2}$ de un electrón de masa m_e y momentum p_e es igual a la energía $E = pc$ de un fotón de momentum p (y masa nula), tenemos

$$(pc)^2 = (p_e c)^2 + (m_e c^2)^2, \tag{1.2}$$

que simplificando por c^2 queda como

$$p^2 = p_e^2 + (m_e c)^2. \tag{1.3}$$

La longitud de onda de de Broglie λ asociada a una partícula de momentum p es $\lambda = h/p$, por lo tanto, reemplazando en la ecuación anterior,

$$\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{h}{\lambda_e}\right)^2 + (m_e c)^2, \tag{1.4}$$

que podemos reordenar y simplificar por h^2 para concluir que,

$$\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_e^2} = \frac{m_e^2 c^2}{h^2}, \tag{1.5}$$

es decir, un electrón a pesar de tener la misma energía E que fotón tiene distinta longitud de onda (porque el lado derecho de la ecuación es no nulo).

Ahora, si $E \gg m_e c^2$, entonces $E^2 \gg (m_e c^2)^2$. Tomando la ecuación inicial que iguala la energía E de un fotón con la energía de un electrón,

$$E^2 = (p_e c)^2 + (m_e c^2)^2 \tag{1.6}$$

podemos apreciar que al reordenar,

$$\underbrace{E^2 - (m_e c^2)^2}_{\approx E^2} = (p_e c)^2 \tag{1.7}$$

puesto que E^2 es mucho más grande que $(m_e c^2)^2$. Así, reemplazando la energía del fotón,

$$(pc)^2 = (p_e c)^2 \tag{1.8}$$

donde podemos simplificar por c^2 y utilizar la relación de de Broglie,

$$\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{h}{\lambda_e}\right)^2 \tag{1.9}$$

para concluir que ambas longitudes de onda tienden a ser iguales en el límite $E \gg m_e c^2$:

$$\lambda = \lambda_e. \tag{1.10}$$

P2. [2.6 "A Guide to Physics Problems"] Rapidity

Considere dos transformaciones de Lorentz sucesivas de los sistemas de referencia S_0, S_1 y S_2. El sistema S_1 se mueve paralelo al eje x de S_0 con velocidad v, tal como también lo hace S_2 con respecto a S_1.

a) **Dado un objeto moviéndose en la dirección x con velocidad v_2 en S_2, derive la fórmula para la transformación de su velocidad de S_2 a S_0.**

b) **Ahora considere $n+1$ sistemas moviéndose con la misma velocidad v relativa el uno con el otro. Derive la fórmula para una transformación de Lorentz de S_n a S_0, si la velocidad del objeto en S_n es también v.**

Hint: Usted podría usar la definición de rapidity $\tanh\psi = \beta$, donde $\beta = v/c$.

P3. [P3 C1 FI3102 2021-2] Señales electromagnéticas

Sea un cuerpo estacionario con energía inicial conocida en un sistema S, en el cual el cuerpo está en reposo. Considere la energía en otro sistema S', en movimiento con respecto a S con una velocidad $\vec{v} = v\hat{x}$. Supongamos que el cuerpo emite dos señales electromagnéticas en direcciones $+\hat{x}$ y $-\hat{x}$, cada una con la misma energía $\epsilon/2$ que asumimos conocida. Considere las energías del cuerpo en S y S', después de la emisión de los fotones.

En este problema queremos deducir la relación entre la energía total del cuerpo y su masa, suponiendo que la Mecánica Galileana es válida en el límite $v/c \ll 1$.

a) **Escriba la conservación de la energía en S y S'.**

Consideramos conocida la energía inicial E_0 del cuerpo en S y la energía E_1 después de la emisión. La conservación de energía en el sistema S establece que

$$\overbrace{\underbrace{E_0}_{\text{cuerpo}}}^{\text{inicial}} = \overbrace{\underbrace{E_1}_{\text{cuerpo}} + \underbrace{\frac{\epsilon}{2}}_{\substack{\text{fotón}\\ -x}} + \underbrace{\frac{\epsilon}{2}}_{\substack{\text{fotón}\\ +x}}}^{\text{final}} \tag{3.1}$$

es decir,

$$E_0 = E_1 + \epsilon. \tag{3.2}$$

Ahora, en S' consideramos nuevamente conocida la energía inicial E_0' del cuerpo y la energía E_1' después de la emisión. Sabemos que la energía de las señales electromagnéticas transforman bajo un boost como $\epsilon' = \gamma\epsilon$. Luego, la conservación de energía en el sistema S' establece que

$$E_0' = E_1' + \gamma\epsilon'. \tag{3.3}$$

b) **Considere la energía cinética del cuerpo (i.e. la diferencia entre la energía total y la energía de reposo). Evalúe la diferencia en energía cinética antes y después de la emisión de los fotones (y en el límite $v/c \ll 1$).**

El cuerpo en el sistema S está en reposo, por lo tanto, su energía cinética antes de la emisión es nula, $K_0 = 0$, al igual que su energía cinética después de la emisión, $K_1 = 0$.

Sabemos que la energía cinética K_0' del cuerpo en S' es la diferencia entre la energía total E_0' y la energía de reposo E_0 (porque es su energía en S' cuando está estacionario), luego, $K_0' = E_0' - E_0$. Análogamente, después de la emisión tiene una energía cinética $K_1' = E_1' - E_1$.

La diferencia en energía cinética antes y después de la emisión de fotones es, entonces,

$$K_1' - K_0' = (E_1' - E_1) - (E_0' - E_0) = E_1' - E_1 - E_0' + E_0 \tag{3.4}$$

y usando el resultado de conservación de energía del inciso anterior,

$$K_1' - K_0' = E_1' - E_1 - (E_1' + \gamma\epsilon') + (E_1 + \epsilon) = (1-\gamma)\epsilon. \tag{3.5}$$

Considerando límite $\beta \ll 1$, podemos recordar la expansión en serie de Taylor en $x = 0$ de $1/\sqrt{1-x^2} = 1 + x^2/2 + \cdots$, para aproximar $\gamma \approx 1 + \beta^2/2$ y concluir que la diferencia de energía cinética en este límite es

$$K_1' - K_0' \approx \frac{1}{2}\epsilon\beta^2 = \frac{1}{2}\epsilon\frac{v^2}{c^2}. \tag{3.6}$$

c) **Concluya, siguiendo a Einstein, que "si un cuerpo emite una cantidad de energía ϵ en forma de luz, su masa disminuye en ϵ/c^2.**

Suponiendo que el cuerpo tiene una masa en reposo m, entonces su energía cinética en el límite no relativista $\beta \ll 1$ toma la forma clásica $K = (\gamma - 1)mc^2 \approx mc^2\beta^2/2 = \frac{1}{2}mv^2$. Así, la diferencia de energía antes y después de la emisión establece que,

$$K_1' - K_0' \approx \frac{1}{2}m_1v^2 - \frac{1}{2}m_0v^2 \equiv \frac{1}{2}\Delta m v^2 \tag{3.7}$$

ya que su energía en reposo $E_0 = m_0c^2$ cambia a $E_1 = m_1c^2$. Finalmente, igualando ambas aproximaciones de $K_1' - K_0'1$ en el límite $\beta \ll 1$, tenemos

$$\frac{1}{2}\epsilon\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{2}\Delta m v^2 \tag{3.8}$$

y reordenando concluimos

$$\epsilon = \Delta m c^2, \tag{3.9}$$

es decir, siguiendo a Einstein, si un cuerpo emite una cantidad de energía ϵ, su masa disminuye en ϵ/c^2.

P4. [P3 T5 FI3102 2021-2] Efecto Compton

Un fotón de $1\,\mathrm{MeV}$ colisiona con un electrón libre y es dispersado por un ángulo de $90°$. ¿Cuál es la energía del electrón dispersado y la energía cinética del electrón en retroceso?

Usando la fórmula de Compton, la longitud de onda del fotón dispersado es

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c}(1-\cos\theta) = \lambda + \frac{h}{m_e c}\left(1 - \cancelto{0}{\cos\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{hc}{E} + \frac{h}{m_e c} = hc\left(\frac{1}{E} + \frac{1}{m_e c^2}\right), \quad (4.1)$$

luego, la energía del fotón dispersado es,

$$E' = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{1}{\dfrac{1}{E} + \dfrac{1}{m_e c^2}} = 0.338\,\mathrm{MeV}, \quad (4.2)$$

donde hemos considerado $E = 1\,\mathrm{MeV}$ y $m_e = 0.51\,\mathrm{MeV}/c^2$.

La energía cinética del fotón en retroceso se obtiene estableciendo conservación de la energía,

$$\underbrace{E}_{\substack{\text{fotón}\\\text{incidente}}} + \underbrace{m_e c^2}_{\substack{\text{electrón}\\\text{en reposo}}} = \underbrace{E'}_{\substack{\text{fotón}\\\text{dispersado}}} + \underbrace{\gamma m_e c^2}_{\substack{\text{electrón}\\\text{dispersado}}}, \quad (4.3)$$

es decir, reordenando

$$(\gamma - 1) m_e c^2 = E - E' \quad (4.4)$$

por lo tanto, la energía cinética del electrón posterior a la colisión es,

$$K'_e \equiv (\gamma-1)m_e c^2 = E - E' = 1\,\mathrm{MeV} - 0.338\,\mathrm{MeV} = 0.662\,\mathrm{MeV}. \quad (4.5)$$

P5. [2.12 "A Guide to Physics Problems"] Positronio y efecto Doppler relativista

Un electrón e^- y un positrón, e^+, cada uno de masa m_e, unidos con una energía de enlace E_b en el positronio, se aniquilan creando dos fotones.

a) **Calcule la energía, momentum, velocidad y frecuencia de los fotones.**

b) **El positronio con velocidad $\vec{v}$ se aleja del observador en el laboratorio y se aniquila creando un fotón que se aleja y otro que se acerca al observador. Encuentre la frecuencia del fotón medida por el observador y calcule su frecuencia en términos de la frecuencia en el sistema de referencia en reposo del positronio.**

P6. [P4 T5 FI3102 2021-2] Efecto Compton

Considere una colisión elástica entre un fotón (con momentum $\vec{p}_0$ y energía E_0) y un electrón estacionario.

a) **Asumiendo que el fotón rebota directamente de vuelta con momentum $\vec{p}$ (en la dirección de $-\vec{p}_0$) y energía E, utilice conservación de energía y momentum para encontrar p.**

La conservación de energía establece que

$$\underbrace{E_0}_{\substack{\text{fotón}\\\text{incidente}}} + \underbrace{m_\mathrm{e}c^2}_{\substack{\text{electrón}\\\text{estacionario}}} = \underbrace{E}_{\substack{\text{fotón}\\\text{dispersado}}} + \underbrace{E_\mathrm{e}}_{\substack{\text{electrón}\\\text{dispersado}}} \tag{6.1}$$

que se puede reescribir como

$$p_0c + m_\mathrm{e}c^2 = pc + \sqrt{(p_\mathrm{e}c)^2 + (m_\mathrm{e}c^2)^2} \tag{6.2}$$

al recordar que para un fotón $E = pc$ y para un electrón $E_\mathrm{e}^2 = (p_\mathrm{e}c)^2 + (m_\mathrm{e}c^2)^2$. La conservación de momentum establece que

$$\underbrace{p_0}_{\substack{\text{fotón}\\\text{incidente}}} + \underbrace{0}_{\substack{\text{electrón}\\\text{estacionario}}} = \underbrace{-p}_{\substack{\text{fotón}\\\text{dispersado}}} + \underbrace{p_\mathrm{e}}_{\substack{\text{electrón}\\\text{dispersado}}} \tag{6.3}$$

por lo tanto, $p_\mathrm{e} = p_0 + p$ y reemplazamos en la ecuación para la energía,

$$p_0c + m_\mathrm{e}c^2 = pc + \sqrt{((p_0 + p)c)^2 + (m_\mathrm{e}c^2)^2}. \tag{6.4}$$

Simplificamos por c y reordenamos,

$$(p_0 - p) + m_\mathrm{e}c = \sqrt{(p_0 + p)^2 + (m_\mathrm{e}c)^2}. \tag{6.5}$$

Elevando al cuadrado,

$$(p_0 - p)^2 + 2(p_0 - p)m_\mathrm{e}c + \cancel{(m_\mathrm{e}c)^2} = (p_0 + p)^2 + \cancel{(m_\mathrm{e}c)^2} \tag{6.6}$$

y desarrollando los cuadrados,

$$\cancel{p_0^2} - 2p_0p + \cancel{p^2} + 2(p_0 - p)m_\mathrm{e}c = \cancel{p_0^2} + 2p_0p + \cancel{p^2} \tag{6.7}$$

es decir,

$$(p_0 - p)m_\mathrm{e}c = 2p_0p \tag{6.8}$$

que nos permite despejar directamente el momentum del fotón:

$$p = \frac{p_0m_\mathrm{e}c}{2p_0 + m_\mathrm{e}c}, \tag{6.9}$$

o bien,

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_0} + \frac{2}{m_\mathrm{e}c}. \tag{6.10}$$

b) Verifique que su respuesta concuerda con la fórmula de Compton,

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta) \tag{6.11}$$

con $\theta = \pi$ el ángulo de scattering, h la constante de Planck, λ la longitud de onda post scattering, λ_0 la longitud de onda previo al scattering, m la masa en reposo del electrón y c la velocidad de la luz.

La fórmula de Compton se reduce a

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_\mathrm{e}c}\Big(1 - \cancelto{-1}{\cos\pi}\Big) = \frac{2h}{m_\mathrm{e}c}. \tag{6.12}$$

Recordando la relación de de Broglie, $\lambda = h/p$, por lo tanto,

$$\frac{h}{p} - \frac{h}{p_0} = \frac{2h}{mc} \tag{6.13}$$

que al simplificar por h y reordenar queda como

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_0} + \frac{2}{m_\mathrm{e}c} \tag{6.14}$$

verificando así que la respuesta anterior concuerda con la fórmula de Compton.

P7. [P5 T5 FI3102 2021-2] Scattering fotón-electrón

Considere el scattering de un fotón por un electrón en movimiento. Antes de la colisión, el fotón tiene longitud de onda λ y se mueve en la dirección x positiva. Por otro lado, el electrón se mueve en la dirección x negativa con energía total E (incluyendo su energía en reposo mc^2). Después de la colisión, ambos se mueven en la dirección x negativa (esto es, el fotón ha sido dispersado en un ángulo de 180°).

a) **Derive una expresión para la longitud de onda λ' del fotón dispersado. Muestre que si $E \gg mc^2$, donde m es la masa en reposo del electrón, su resultado se reduce a**

$$\lambda' = \frac{hc}{E}\left(1 + \frac{m^2c^4\lambda}{4hcE}\right). \tag{7.1}$$

La energía en esta colisión entre fotón y electrón se conserva,

$$E_\mathrm{f} + E_\mathrm{e} = E'_\mathrm{f} + E'_\mathrm{e}, \tag{7.2}$$

y se puede reconocer $E_\mathrm{f} = p_\mathrm{f}c$, $E_\mathrm{e} = E = \sqrt{m_\mathrm{e}^2c^4 + p_\mathrm{e}^2c^2}$, $E'_\mathrm{f} = p'_\mathrm{f}c$ y $E'_\mathrm{e} = \sqrt{m_\mathrm{e}^2c^4 + p'^2_\mathrm{e}c^2}$, por lo tanto, reemplazando y reordenando,

$$(p_\mathrm{f} - p'_\mathrm{f})c + E = \sqrt{m_\mathrm{e}^2c^4 + p'^2_\mathrm{e}c^2}, \tag{7.3}$$

que al elevar al cuadrado queda:

$$\big(p_\mathrm{f}^2 - 2p_\mathrm{f}p'_\mathrm{f} + p'^2_\mathrm{f}\big)c^2 + 2(p_\mathrm{f} - p'_\mathrm{f})cE + E^2 = m_\mathrm{e}^2c^4 + p'^2_\mathrm{e}c^2 \tag{7.4}$$

Además, el momentum también se conserva,

$$\vec{p}_\mathrm{f} + \vec{p}_\mathrm{e} = \vec{p}\,'_\mathrm{f} + \vec{p}\,'_\mathrm{e}\,. \tag{7.5}$$

Proyectando en $\hat{x}$,

$$p_\mathrm{f} - p_\mathrm{e} = -p'_\mathrm{f} - p'_\mathrm{e}, \tag{7.6}$$

por lo tanto,

$$p'_{\rm e} = p_{\rm e} - p_{\rm f} - p'_{\rm f} \tag{7.7}$$

que permite reescribir,

$$E'^2_{\rm e} = m_{\rm e}^2c^4 + p'^2_{\rm e}c^2 = \underbrace{m_{\rm e}^2c^4 + p_{\rm e}^2c^2}_{E^2} + p_{\rm f}^2c^2 + p'^2_{\rm f}c^2 - 2p_{\rm e}p_{\rm f}c^2 - 2p_{\rm e}p'_{\rm f}c^2 + 2p_{\rm f}p'_{\rm f}c^2. \tag{7.8}$$

Reemplazando en el lado derecho de la ecuación de conservación de la energía,

$$\left(\cancel{p_{\rm f}^2} + \cancel{p'^2_{\rm f}} - 2p_{\rm f}p'_{\rm f}\right)c^2 + \cancel{E^2} + 2E(p_{\rm f} - p'_{\rm f})c = \cancel{E^2} + \cancel{p_{\rm f}^2c^2} + \cancel{p'^2_{\rm f}c^2} - 2p_{\rm e}p_{\rm f}c^2 - 2p_{\rm e}p'_{\rm f}c^2 + 2p_{\rm f}p'_{\rm f}c^2, \tag{7.9}$$

que se puede simplificar a,

$$2E(p_{\rm f} - p'_{\rm f})c = -2p_{\rm e}p_{\rm f}c^2 - 2p_{\rm e}p'_{\rm f}c^2 + 4p_{\rm f}p'_{\rm f}c^2, \tag{7.10}$$

y esto permite despejar el momentum del fotón dispersado:

$$p'_{\rm f} = \frac{E + p_{\rm e}c}{E - p_{\rm e}c + 2p_{\rm f}c}p_{\rm f}. \tag{7.11}$$

Recordando la relación de de Broglie, $\lambda' = h/p'_{\rm f}$,

$$\lambda' = \frac{E - p_{\rm e}c + 2p_{\rm f}c}{E + p_{\rm e}c}\frac{h}{p_{\rm f}}, \tag{7.12}$$

y para $\lambda = h/p$,

$$\lambda' = \frac{E - p_{\rm e}c + 2hc/\lambda}{E + p_{\rm e}c}\lambda = \frac{E - p_{\rm e}c}{E + p_{\rm e}c}\lambda + \frac{2hc}{E + p_{\rm e}c}. \tag{7.13}$$

La serie de Taylor de la función $\sqrt{1-x^2}$ en $x = 0$ es,

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{16} - \cdots, \tag{7.14}$$

por lo que podemos realizar la siguiente aproximación cuando $E \gg m_{\rm e}c^2$,

$$p_{\rm e}c = \sqrt{E^2 - m_{\rm e}^2c^4} = E\sqrt{1 - \left(\frac{m_{\rm e}c^2}{E}\right)^2} \approx E\left(1 - \left(\frac{1}{2}\frac{m_{\rm e}c^2}{E}\right)^2\right) = E - \frac{m_{\rm e}^2c^4}{2E} \tag{7.15}$$

puesto que $m_{\rm e}c^2/E \ll 1$. Así, reemplazando en la expresión para la longitud de onda,

$$\lambda' = \frac{E - \left(E - \frac{m_{\rm e}^2c^4}{2E}\right)}{E + E - \frac{m_{\rm e}^2c^4}{2E}}\lambda + \frac{2hc}{E + E - \frac{m_{\rm e}^2c^4}{2E}} = \frac{\frac{m_{\rm e}^2c^4}{2E}}{2E - \frac{m_{\rm e}^2c^4}{2E}}\lambda + \frac{2hc}{2E - \frac{m_{\rm e}^2c^4}{2E}}, \tag{7.16}$$

que se puede factorizar como,

$$\lambda' = \frac{hc}{E}\left(2 + \frac{m_{\rm e}^2c^4\lambda}{2hcE}\right)\frac{1}{2 - m_{\rm e}^2c^4/E^2}. \tag{7.17}$$

Notemos que si $E \gg m_{\rm e}c^2$, entonces $m_{\rm e}^2c^4/E^2 \approx 0$, y obtenemos la aproximación deseada:

$$\lambda' \approx \frac{hc}{E}\left(1 + \frac{m_{\rm e}^2c^4\lambda}{4hcE}\right). \tag{7.18}$$

b) **Un haz de radiación infrarroja de un láser de CO_2 ($\lambda = 10.6\,\mu\text{m}$) colisiona con un haz de electrones, cada uno de energía total $E = 10\,\text{GeV}$. Calcule la longitud de onda λ' de los electrones dispersados, asumiendo un ángulo de scattering de $180°$.**

Considerando

$$E = 1 \times 10^{10}\,\text{eV} \tag{7.19}$$

$$hc = 1.24 \times 10^{-6}\,\text{eV m} \tag{7.20}$$

$$m_e c^2 = 0.51\,\text{MeV} \tag{7.21}$$

$$\lambda = 10.6 \times 10^{-6}\,\text{m} \tag{7.22}$$

y reemplazando en la expresión anterior, obtenemos la longitud de onda de los electrones dispersados:

$$\lambda' \approx 7\,\text{fm}. \tag{7.23}$$

c) **¿Qué tipo de fotones dispersados son estos? (Infrarrojos, microondas, ultravioletas, etc.) ¿Puede decir alguna aplicación de este efecto?**

La radiación inicial es infrarrojo cercano y la dispersión es de rayos gamma. La radiación gamma se suele utilizar para esterilizar alimentos, medicamentos, equipos de laboratorio, sangre, tejido y materiales sanitarios.