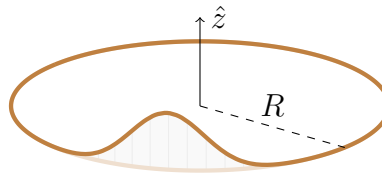


Pauta Auxiliar 2

21 de diciembre de 2022

P1. [P1 C1 2022-2] Cuerda circular

Considere una cuerda de densidad de masa por unidad de longitud μ , sometida a una tensión T , desplegada en una circunferencia de radio R . La cuerda es susceptible de ser perturbada (ligeramente) transversalmente al plano en que se encuentra según la dirección $\hat{z}$, como se muestra en la figura.



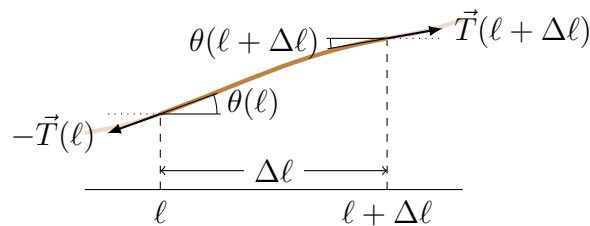
- a) Explique y escriba la ecuación de onda clásica que describe la propagación de las perturbaciones. Para esto, primero determine la variable espacial relevante para describir la propagación transversal a lo largo de la cuerda.

La ecuación de onda clásica que describe la propagación de pequeñas perturbaciones transversales al plano XY es la conocida ecuación de onda para una cuerda:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \ell^2}, \quad (1.1)$$

(porque la cuerda circular es simplemente una cuerda común extendida pero con los extremos unidos satisfaciendo una condición de borde periódica) donde $z = z(\ell, t)$ es la perturbación transversal y ℓ es la variable espacial de un arco de circunferencia que subtiende un ángulo φ , que en radianes cumple $\ell = R\varphi$.

Si no recordamos la ecuación podemos demostrarlo. Para esto, estudiemos la dinámica de un trocito de cuerda. Formalmente, un trozo corresponde a un elemento infinitesimal de longitud entre las posiciones ℓ y $\ell + \Delta\ell$ (equivalentes a ángulos φ y $\varphi + \Delta\varphi$).



(Vista lateral de la cuerda circular.) El trozo tiene una masa $\Delta m = \mu \Delta \ell = \mu R \Delta \varphi$. El trozo solamente se mueve en la dirección vertical, por lo que tiene una aceleración $\vec{a} = \hat{z} \partial^2 z / \partial t^2$, ya que la perturbación es transversal y no longitudinal ni radial. El trozo está

sujeto a una tensión $\vec{T}$, pues un trozo izquierdo ejerce una fuerza $-\vec{T}(\ell)$ sobre él y otro trozo a la derecha le ejerce una $\vec{T}(\ell + \Delta\ell)$. Podemos descomponer estas tensiones en una componente transversal $\hat{z}$ y una longitudinal $\hat{\ell}$: $\vec{T}(\ell) = T(\ell) \cos(\theta(\ell))\hat{\ell} + T(\ell) \sin(\theta(\ell))\hat{z}$. Además, no consideramos gravedad en el sistema. La segunda ley de Newton para este trocito establece que

$$\vec{a}\Delta m = \sum \vec{F} = \vec{T}(\ell + \Delta\ell) - \vec{T}(\ell). \quad (1.2)$$

La componente longitudinal (según la dirección de ℓ) dice que

$$0 = T(\ell + \Delta\ell) \cos(\theta(\ell + \Delta\ell)) - T(\ell) \cos(\theta(\ell)). \quad (1.3)$$

La perturbación transversal es ligera, por lo que consideramos $\theta \ll 1$ y, por lo tanto, podemos aproximar $\cos \theta \approx 1$. Así,

$$0 = T(\ell + \Delta\ell) - T(\ell) \quad (1.4)$$

dividiendo por $\Delta\ell$ notamos que aparece la definición de derivada al hacer tender $\Delta\ell \rightarrow 0$:

$$0 = \frac{T(\ell + \Delta\ell) - T(\ell)}{\Delta\ell} \xrightarrow{\Delta\ell \rightarrow 0} \frac{dT}{d\ell} \implies T(\ell) = \text{const} =: T \quad (1.5)$$

y por lo tanto la tensión no depende de la posición espacial ℓ a lo largo de la cuerda, lo que tiene sentido pues esto podría propiciar movimientos longitudinales indeseados.

La componente transversal (según la dirección z) de la segunda ley de Newton dice que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \mu \Delta\ell = T \sin(\theta(\ell + \Delta\ell)) - T \sin(\theta(\ell)). \quad (1.6)$$

La pendiente de la cuerda se puede representar como la tangente del ángulo de inclinación, que a su vez se puede aproximar para ángulos pequeños $\theta \ll 1$ con $\cos \theta \approx 1$,

$$\frac{\partial z}{\partial \ell} = \tan(\theta(\ell)) = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \approx \sin \theta \quad (1.7)$$

por lo tanto, dividiendo la ecuación por $\Delta\ell \rightarrow 0$ y aproximando para ángulos pequeños obtenemos

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \mu = T \frac{\sin(\theta(\ell + \Delta\ell)) - \sin(\theta(\ell))}{\Delta\ell} \stackrel{\theta \ll 1}{\approx} T \frac{\left. \frac{\partial z}{\partial \ell} \right|_{\ell + \Delta\ell} - \left. \frac{\partial z}{\partial \ell} \right|_{\ell}}{\Delta\ell} \xrightarrow{\Delta\ell \rightarrow 0} T \frac{\partial^2 z}{\partial \ell^2}. \quad (1.8)$$

Definiendo una velocidad $c = \sqrt{T/\mu}$, concluimos con la ecuación de onda clásica

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \ell^2}. \quad (1.9)$$

Podemos pasar al espacio angular mediante la regla de la cadena asociada a $\ell = R\varphi$ y obtener una ecuación equivalente:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}. \quad (1.10)$$

b) Encuentre los modos normales (que son ondas estacionarias) de esta perturbación para la cuerda circular.

En una onda estacionaria, todos los elementos espaciales (i.e. coordenadas ℓ) oscilan con la misma frecuencia temporal y en fase, pero cada uno tiene una amplitud distinta (dependiente de ℓ). Luego, la forma general de una onda estacionaria es

$$z(\ell, t) = f(\ell)[A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] \quad (1.11)$$

donde $f(\ell)$ representa la dependencia de la amplitud en la posición ℓ y las funciones sinusoidales son las oscilaciones en el tiempo (todas las posiciones ℓ tienen la misma frecuencia ω y fase).

Esta cuerda de largo L es circular, por lo que podemos pensarla como una cuerda extendida pero con los extremos unidos, es decir, satisface la condición L -periódica $f(\ell) = f(\ell + L)$ para la amplitud de cualquier posición ℓ . (Notemos que si esto no se cumpliera, entonces al congelar el tiempo y avanzar una vuelta completa en la cuerda, existiría una discontinuidad que físicamente no puede ocurrir.)

Los modos normales de un sistema oscilatorio son los movimientos en los que todas las partículas del sistema (i.e. coordenadas ℓ) se mueven sinusoidalmente con la misma frecuencia espacial. Esto se traduce como que la forma de la función $f(\ell)$ es sinusoidal con frecuencia espacial (número de onda) k , es decir,

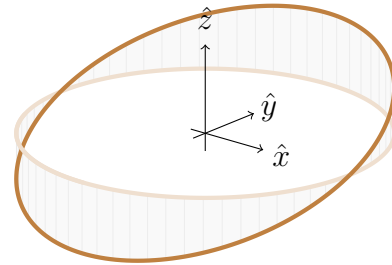
$$f(\ell) = C \cos(k\ell) + D \sin(k\ell). \quad (1.12)$$

Por un lado, $f(\ell) = f(\ell + L)$ tiene periodo $L = 2\pi R$ por ser una cuerda de largo circular, entonces imponemos $C \cos(k\ell) + D \sin(k\ell) \stackrel{!}{=} C \cos(k\ell + kL) + D \sin(k\ell + kL)$. Por otro lado, recordamos que las funciones trigonométricas tienen periodo 2π , y, por lo tanto, sumar cualquier múltiplo de 2π al argumento va a dar el mismo resultado, es decir, necesitamos identificar el término $+kL$ en el argumento de las funciones sinusoidales de $f(\ell + L)$ como la periodicidad propia de estas funciones, de modo que $kL = 2\pi n$ para que se cumpla $f(\ell) = f(\ell + L)$, y como $L = 2\pi R$, entonces los números de onda asociados a estos modos normales son $k_n = n/R$, con n entero.

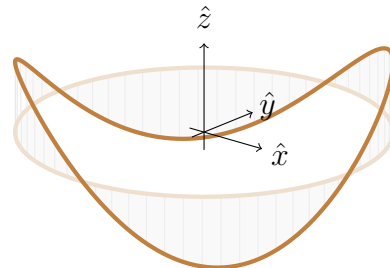
c) Bosqueje los tres primeros modos normales de la cuerda.

Calculamos $\lambda_n = 2\pi/k_n = 2\pi R/n$ para bosquejar los modos normales.

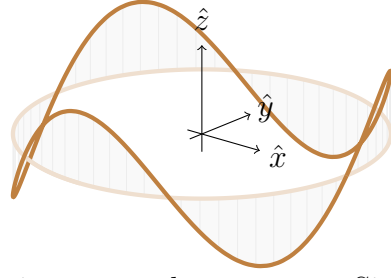
$n = 1$: La longitud de onda es $\lambda_1 = 2\pi R$.



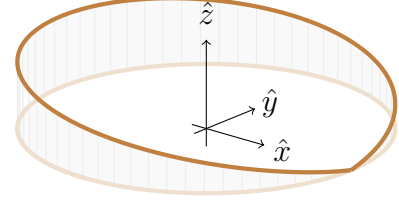
$n = 2$: La longitud de onda es $\lambda_2 = \pi R$.



$n = 3$: La longitud de onda es $\lambda_3 = 2\pi R/3$.



Notemos en los dibujos que la cuerda es continua en todo momento. Si, por ejemplo, hubiésemos obtenido un modo con longitud de onda $4\pi R$ como la que se muestra abajo, entonces claramente tendríamos un quiebre en la suavidad de la cuerda y podríamos argumentar que eso físicamente no puede ocurrir.



P3. [P2 C1 2022-1] Túnel minero

El túnel de una mina abandonada se proyecta hacia el interior de una montaña donde fue construido. Se quiere conocer el largo del túnel, pero es peligroso entrar en él. Entonces, Ud. decide tratar de establecer resonancias de onda estacionaria en su interior. Usando un amplificador subsónico y un parlante Ud. encuentra resonancias a 4.5 Hz y 6.3 Hz, y a ninguna otra frecuencia ente estas. Además, supone que la rapidez del sonido en el túnel es 335 m s^{-1} (por estar a una temperatura inferior a la ambiente). A partir de sus medidas, estime la longitud que tiene el túnel. Justifique la elección de las condiciones de borde de los extremos del túnel.

Un túnel minero está abierto en la entrada y cerrado al fondo de la mina, por lo que modelamos el túnel como un tubo de largo L con un extremo abierto y otro extremo cerrado. Recordamos inmediatamente que la frecuencia natural f_n del n -ésimo modo normal de un sistema de este estilo es

$$f_n = (2n - 1) \frac{c}{4L}, \quad (3.1)$$

con $c = 335 \text{ m s}^{-1}$ la rapidez del sonido. Sabemos que no hay ninguna otra frecuencia entre las resonancias 4.5 Hz y 6.3 Hz que hemos encontrado, por lo tanto, suponemos que la primera es el modo n con $f_n = 4.5 \text{ Hz}$ y que la segunda es el modo posterior $n + 1$ con $f_{n+1} = 6.3 \text{ Hz}$. Así, tenemos un sistema de 2×2 , con dos ecuaciones para cada frecuencia y dos incógnitas: n y L . Por el lado experimental, sabemos que

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{6.3 \text{ Hz}}{4.5 \text{ Hz}} = 1.4 \quad (3.2)$$

y por el lado teórico,

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{(2(n+1) - 1) \frac{c}{4L}}{(2n - 1) \frac{c}{4L}} = \frac{2n + 1}{2n - 1} \quad (3.3)$$

por lo tanto, igualamos ambos resultados para obtener

$$\frac{2n + 1}{2n - 1} = 1.4 \implies n = 3 \quad (3.4)$$

y finalmente podemos despejar L de la ecuación de f_n :

$$L = (2n - 1) \frac{c}{4f_n} = (2 \times 3 - 1) \frac{335 \text{ m s}^{-1}}{4 \times 4.5 \text{ Hz}} \approx 93 \text{ m} . \quad (3.5)$$