

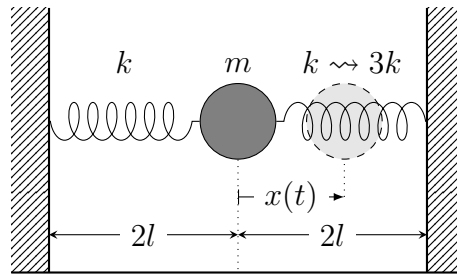
Pauta Auxiliar 1

20 de diciembre de 2022

P1. [P1 C1 2019-2] Oscilaciones en resortes tensos

Considere dos resortes de largo natural l y constante elástica k , unidos por una partícula puntual de masa m . Estos resortes se estiran y anclan a dos murallas separadas por una distancia $4l$. Note que la masa queda a una distancia $2l$ de cada muralla pues los resortes son iguales y el sistema es simétrico.

Tras el estiramiento, se modifica instantáneamente el resorte derecho para que triplique su constante elástica. Luego, la masa comienza a oscilar armónicamente.



a) Encuentre la ecuación de movimiento de la masa.

Ubicamos el origen del sistema de referencia a una distancia $2l$ de las murallas, es decir, en el punto de equilibrio original. Definimos x como la posición de la masa en función del tiempo t con respecto al origen.

La ley de Hooke establece que un resorte de constante elástica k elongado una distancia δ por el extremo libre con respecto a la posición en su largo natural l ejerce una fuerza F dada por

$$F = -k\delta. \quad (1.1)$$

Esta elongación la podemos calcular como el largo total de resorte elongado (es decir, desde la pared hasta la masita en el extremo libre) restado con el largo natural del resorte. Luego, el resorte de la izquierda se elonga

$$\delta_{\text{izq}} = L_{\text{total}} - L_{\text{natural}} = (2l + x) - (l) = l + x \quad (1.2)$$

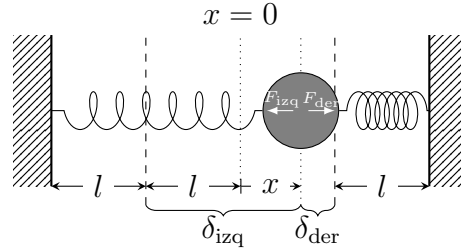
y ejerce una fuerza $F_{\text{izq}} = -k(l + x)$ sobre la masita, y el resorte de la derecha se elonga

$$\delta_{\text{der}} = L_{\text{total}} - L_{\text{natural}} = (2l - x) - (l) = l - x \quad (1.3)$$

pero en sentido opuesto al resorte anterior, por lo que ejerce una fuerza $F_{\text{der}} = +3k(l - x)$.

Si no sabemos qué signo poner en F , podemos chequear los signos recordando lo siguiente: la fuerza elástica ejercida por un resorte aislado siempre apunta hacia la posición

del largo natural del resorte, y, además, la constante elástica es siempre positiva, pero la elongación puede variar. Así, para el resorte izquierdo: si la masa está en la posición $x = -l$ del largo natural, entonces $F_{\text{izq}} = 0$; si la masa está en una posición $x > -l$ a la derecha de esta posición, entonces $F_{\text{izq}} < 0$ y la fuerza apunta hacia la izquierda; si la masa está en una posición $x < -l$ a la izquierda de esta posición, entonces $F_{\text{izq}} > 0$ y la fuerza apunta hacia la derecha, por lo que el signo ‘-’ de F_{izq} está bien; y para el resorte derecho: si la masa está en la posición $x = l$ del largo natural, entonces $F_{\text{der}} = 0$; si la masa está en una posición $x > l$ a la derecha de esta posición, entonces $F_{\text{der}} < 0$ y la fuerza apunta hacia la izquierda; si la masa está en una posición $x < l$ a la izquierda de esta posición, entonces $F_{\text{der}} > 0$ y la fuerza apunta hacia la derecha, por lo que el signo ‘+’ de F_{der} también está bien.



La segunda ley de Newton ($\sum \vec{F} = m\vec{a}$) dice que

$$m\ddot{x} = F_{\text{izq}} + F_{\text{der}} = -k\delta_{\text{izq}} + 3k\delta_{\text{der}} \quad (1.4)$$

(ojo con el signo frente a F_{der}) por lo tanto, la ecuación de movimiento es

$$m\ddot{x} = -k(l + x) + 3k(l - x) \quad (1.5)$$

$$= -kl - kx + 3kl - 3kx \quad (1.6)$$

$$= -4kx + 2kl \quad (1.7)$$

$$= -4k\left(x - \frac{l}{2}\right) \quad (1.8)$$

que se puede reescribir como

$$\ddot{x} = -\frac{4k}{m}\left(x - \frac{l}{2}\right) \quad (1.9)$$

y tiene la forma de un MAS desplazado.

- b) Calcule la nueva posición de equilibrio en torno a la cual se producirá la oscilación.**

Un punto de equilibrio x_{eq} es aquel en que la fuerza neta se anula. Por lo tanto, gracias a la segunda ley de Newton, satisface $\ddot{x} = 0$. Luego,

$$0 = -\frac{4k}{m}\left(x_{\text{eq}} - \frac{l}{2}\right) \Rightarrow x_{\text{eq}} = \frac{l}{2}, \quad (1.10)$$

es decir, la posición de equilibrio se desplaza desde el centro en $l/2$ hacia la derecha.

- c) Escriba la solución para la posición de la masa en función del tiempo $x(t)$ medida con respecto a la posición de equilibrio original. Aplique las condiciones iniciales del problema. Recuerde explicitar la amplitud, frecuencia angular y fase de oscilación en su respuesta final.**

Definimos

$$\omega_0^2 = \sqrt{\frac{4k}{m}} \quad (1.11)$$

y reescribimos la ecuación de movimiento como

$$\ddot{x} + \omega_0^2(x - x_{\text{eq}}) = 0. \quad (1.12)$$

Hacemos el cambio de variable $\bar{x} = x - x_{\text{eq}}$ y notando que $\ddot{\bar{x}} = \ddot{x}$ pues x_{eq} es constante entonces tenemos

$$\ddot{\bar{x}} + \omega_0^2 \bar{x} = 0, \quad (1.13)$$

que corresponde a la ecuación de un movimiento armónico simple, cuya solución conocemos:

$$\bar{x}(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (1.14)$$

(también son soluciones $\bar{x}(t) = A_2 \sin(\omega_0 t + \phi_2)$ y $\bar{x}(t) = C \cos(\omega_0 t) + D \sin(\omega_0 t)$, y podemos encontrar una relación entre los tres pares de constantes mediante identidades trigonométricas, pero nos quedamos con la solución del coseno por simplicidad para las condiciones iniciales de velocidad nula). Deshaciendo el cambio de variable, $x(t) = \bar{x}(t) + x_{\text{eq}}$, la posición en función del tiempo es

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) + x_{\text{eq}} \quad (1.15)$$

y la velocidad en función del tiempo es

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \phi), \quad (1.16)$$

gracias a la regla de la cadena. El enunciado dice que la masa estaba inicialmente en reposo en el origen, es decir, la condición inicial para la posición es el origen $x(t=0) = 0$ y la velocidad inicial es nula $\dot{x}(t=0) = 0$. Por un lado, utilizando la condición inicial para la velocidad

$$\dot{x}(t=0) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 0 + \phi) = -\omega_0 A \sin(\phi) \stackrel{!}{=} 0 \implies \sin(\phi) = 0 \implies \phi = 0, \quad (1.17)$$

ya que hemos descartado la solución trivial $A = 0$ y $\omega_0 = 0$ que carece de movimiento. Por otro lado, la condición inicial para la posición establece que

$$x(t=0) = A \cos(\omega_0 0 + 0) + x_{\text{eq}} = A \cos(0) + x_{\text{eq}} \stackrel{!}{=} 0 \implies A = -x_{\text{eq}} = -\frac{l}{2}. \quad (1.18)$$

Concluimos entonces que

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) + x_{\text{eq}} = -\frac{l}{2} \cos\left(t\sqrt{\frac{4k}{m}}\right) + \frac{l}{2}, \quad (1.19)$$

o bien

$$x(t) = \frac{l}{2} \left(1 - \cos\left(2t\sqrt{\frac{k}{m}}\right)\right). \quad (1.20)$$

- d) Calcule la energía potencial elástica y energía cinética del sistema en función del tiempo.

La energía potencial elástica de un resorte de constante elástica k y elongación δ es $\frac{1}{2}k\delta^2$. La energía potencial elástica del sistema es la suma de las energías potenciales individuales de cada resorte:

$$U = \frac{1}{2}k\delta_{\text{izq}}^2 + \frac{1}{2}3k\delta_{\text{der}}^2 \quad (1.21)$$

$$= \frac{1}{2}k(l + x(t))^2 + \frac{1}{2}3k(l - x(t))^2 \quad (1.22)$$

$$= \frac{1}{2}k\left(l - \frac{l}{2}\cos\left(t\sqrt{\frac{4k}{m}}\right) + \frac{l}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}3k\left(l + \frac{l}{2}\cos\left(t\sqrt{\frac{4k}{m}}\right) - \frac{l}{2}\right)^2 \quad (1.23)$$

$$= \frac{1}{2}k\left(\frac{3}{2}l - \frac{l}{2}\cos(\omega_0 t)\right)^2 + \frac{1}{2}3k\left(\frac{l}{2} + \frac{l}{2}\cos(\omega_0 t)\right)^2 \quad (1.24)$$

$$= \frac{9kl^2}{8} - \cancel{\frac{3kl^2}{4}\cos(\omega_0 t)} + \frac{kl^2}{8}\cos^2(\omega_0 t) + \frac{3kl^2}{8} + \cancel{\frac{3kl^2}{4}\cos(\omega_0 t)} + \frac{3kl^2}{8}\cos^2(\omega_0 t) \quad (1.25)$$

$$U(t) = \frac{3}{2}kl^2 + \frac{1}{2}kl^2\cos^2(\omega_0 t). \quad (1.26)$$

Por otro lado, la energía cinética es

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2}m\frac{4kl^2}{m} \sin^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2}kl^2 \sin^2(\omega_0 t) = K(t). \quad (1.27)$$

- e) Determine la energía mecánica del sistema y demuestre que es una cantidad conservada.

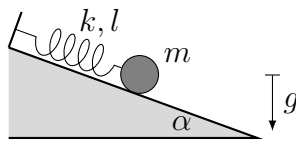
La energía mecánica del sistema es la suma de la energía cinética y la energía potencial elástica del sistema:

$$E = K(t) + U(t) = \frac{3}{2}kl^2 + \frac{1}{2}kl^2 \underbrace{(\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t))}_1 \equiv 2kl^2, \quad (1.28)$$

que es constante a través del tiempo (una cantidad conservada).

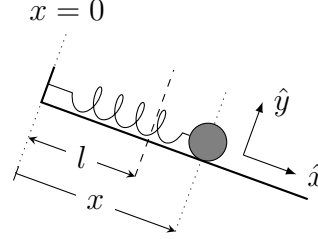
P2. [P1 Ex 2021-2] Masa en plano inclinado

Una partícula de masa m está unida por un resorte de constante elástica k y largo natural l a un punto fijo. La partícula se puede mover sin roce por un plano inclinado en un ángulo α . La partícula se suelta del reposo cuando el largo del resorte es l .



a) Encuentre la ecuación de movimiento de la masa.

Ubicamos el origen del sistema de referencia en el punto izquierdo fijo del resorte. Consideramos los ejes cartesianos inclinados con la dirección $\hat{x}$ positiva cuesta abajo y la dirección $\hat{y}$ positiva perpendicularmente hacia afuera de la cuña. Definimos x como la posición de la masa en función del tiempo con respecto al origen.



La ley de Hooke establece que un resorte de constante elástica k elongado una distancia δ por el extremo libre con respecto a su posición en el largo natural l ejerce una fuerza elástica F dada por

$$F_e = -k\delta \quad (2.1)$$

y notamos que $\delta = x - l$. Podemos corroborar que $F_e = -k(x - l)$ recordando que es una fuerza restauradora que se debe anular cuando el resorte está en su largo natural ($x = l$) y debe apuntar hacia la posición del largo natural ($F_e < 0$ si $x > l$ y $F_e > 0$ si $x < l$).

La segunda ley de Newton dice vectorialmente que

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_e \quad (2.2)$$

La aceleración de gravedad se puede descomponer en $\vec{g} = \hat{x}g \sin \alpha - \hat{y}g \cos \alpha$. La fuerza normal es $\vec{N} = N\hat{y}$ y la fuerza elástica es $\vec{F}_e = -k(x - l)\hat{x}$. Notamos que la partícula no se mueve perpendicularmente a la cuña. Luego, la ecuación de movimiento según $\hat{y}$ es

$$0 = -mg \cos \alpha + N \quad (2.3)$$

que permite despejar la normal, y la ecuación de movimiento según $\hat{x}$ es

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha - k(x - l) = -k(x - l - mg \sin \alpha / k) \quad (2.4)$$

que se puede reescribir como

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m} \left(x - \left(l + \frac{g \sin \alpha}{k/m} \right) \right). \quad (2.5)$$

Notemos que si el plano no estuviese inclinado, $\alpha = 0$ y la ecuación de movimiento se reduciría a $m\ddot{x} = -k(x - l)$, que corresponde a la ecuación de MAS conocida para un resorte horizontal.

b) Determine el punto de equilibrio de la masa.

El punto de equilibrio x_{eq} es aquel en que la fuerza neta se anula, por lo tanto, gracias a la segunda ley de Newton, satisface $\ddot{x} = 0$. Luego,

$$0 = -\frac{k}{m} \left(x_{eq} - \left(l + \frac{g \sin \alpha}{k/m} \right) \right) \implies x_{eq} = l + \frac{g \sin \alpha}{k/m}. \quad (2.6)$$

Nuevamente notamos que la posición de equilibrio en el caso sin inclinación sería simplemente el largo natural del resorte. Considerar la cuña significa añadir un término que acopla la gravedad g con la inclinación $\sin \alpha$ y la frecuencia $\sqrt{k/m}$ original.

- c) **Escriba la solución para la posición de la masa en función del tiempo. Aplique las condiciones iniciales del problema. Recuerde explicitar la amplitud, frecuencia angular y fase de oscilación en su respuesta final.**

Definimos

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} \quad (2.7)$$

y reescribimos la ecuación de movimiento como

$$\ddot{x} + \omega_0^2(x - x_{\text{eq}}) = 0. \quad (2.8)$$

Hacemos el cambio de variable $\bar{x} = x - x_{\text{eq}}$ y notando que $\ddot{\bar{x}} = \ddot{x}$ pues x_{eq} es constante entonces tenemos

$$\ddot{\bar{x}} + \omega_0^2 \bar{x} = 0, \quad (2.9)$$

que corresponde a la ecuación de un movimiento armónico simple, cuya solución conocemos:

$$\bar{x}(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (2.10)$$

(también son soluciones $\bar{x}(t) = A_2 \sin(\omega_0 t + \phi_2)$ y $\bar{x}(t) = C \cos(\omega_0 t) + D \sin(\omega_0 t)$, y podemos encontrar una relación entre los tres pares de constantes mediante identidades trigonométricas, pero nos quedamos con la solución del coseno por simplicidad para las condiciones iniciales de velocidad nula). Deshacemos el cambio de variable escribiendo $x(t) = \bar{x}(t) + x_{\text{eq}}$, y así la posición en función del tiempo es

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) + x_{\text{eq}} \quad (2.11)$$

mientras la velocidad en función del tiempo es

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \phi), \quad (2.12)$$

gracias a la regla de la cadena. El enunciado dice que la partícula se suelta del reposo cuando el largo del resorte es l , por lo que establece la condición inicial para la velocidad $\dot{x}(t=0) = 0$ y para la posición $x(t=0) = l$. Por un lado, utilizando la condición inicial para la velocidad,

$$\dot{x}(t=0) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 0 + \phi) = -\omega_0 A \sin(\phi) \stackrel{!}{=} 0 \implies \sin(\phi) = 0 \implies \phi = 0, \quad (2.13)$$

ya que hemos descartado la solución trivial $A = 0$ y $\omega_0 = 0$ que carece de movimiento. Por otro lado, la condición inicial para la posición establece que

$$x(t=0) = A \cos(\omega_0 0 + 0) + x_{\text{eq}} = A \cos(0) + x_{\text{eq}} \stackrel{!}{=} l \implies A = l - x_{\text{eq}} = -\frac{g \sin \alpha}{k/m}. \quad (2.14)$$

Concluimos entonces que

$$x(t) = -\frac{g \sin \alpha}{k/m} \cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) + l + \frac{g \sin \alpha}{k/m} \quad (2.15)$$

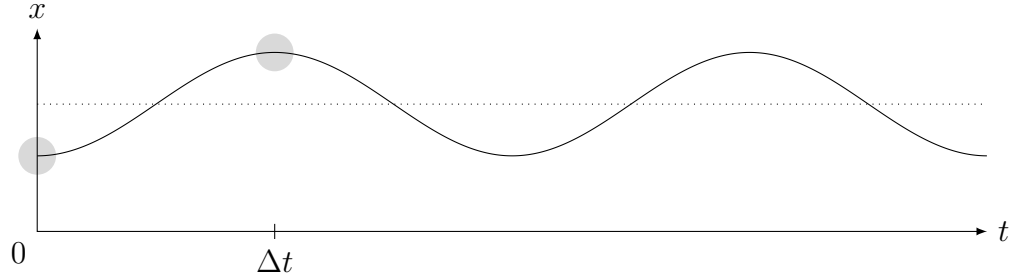
o bien

$$x(t) = \frac{g \sin \alpha}{k/m} \left(1 - \cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right)\right) + l. \quad (2.16)$$

d) Calcule cuánto tiempo tarda la partícula en detenerse nuevamente por primera vez.

La condición inicial de reposo dice $\dot{x}(t=0) = 0$ y ahora buscamos el primer Δt tal que nuevamente $\dot{x}(t = \Delta t) = 0$.

El gráfico de evolución de la posición es:



donde se ha marcado la condición inicial y la primera vez posterior en que $\dot{x} = dx/dt = 0$. Notamos que entre ambas marcas hay medio periodo de oscilación. Luego, el tiempo que tarda es

$$\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{2\pi/\omega_0}{2} = \pi\sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (2.17)$$

Esto también se puede ver matemáticamente calculando la velocidad $\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t)$ y recordando que las raíces del seno son $n\pi$, por lo que $\omega_0 t = n\pi$ y la condición inicial ocurre para $n = 0$ en $t = 0$ y la siguiente detención para $n = 1$ en $t = \pi/\omega_0$, corroborando el resultado anterior.