MA5801-1: Análisis Convexo y Dualidad
Profesor: Alejandro Jofré
Auxiliar: Nicolás Toro

Auxiliar 9

P1. Sea $f \in \Gamma_0(X)$ con X un espacio de Banach. Para $\epsilon > 0$ definimos el $\epsilon-$subdiferencial de f en $x \in X$ como el conjunto de funcionales $x^* \in X^*$ tales que:

$$f(y) \geq f(x) - \epsilon + \langle x^*, y - x \rangle, \quad \forall y \in X$$

a) Pruebe que $\partial_\epsilon f(x)$ es un convexo cerrado. Muestre además que si $x \in \text{dom}(f)$, entonces $\partial_\epsilon f(x)$ es no vació.

b) Sea $x^* \in \partial_\epsilon f(x)$. Pruebe que existen $y \in X$ y $y^* \in \partial f(y)$ tales que $\|y - x\| \leq \sqrt{\epsilon}$ y $\|y^* - x^*\| \leq \sqrt{\epsilon}$

c) Deduzca que $\text{dom}(\partial f)$ es denso en $\text{dom}(f)$. **[Teorema de Bronsted-Rockafellar]**

En lo que sigue, suponga que $\inf_{x \in X} f(x) = m > -\infty$ y sea $\epsilon > 0$

d) Pruebe que x es un $\epsilon-$minimo si y solo si $0 \in \partial_\epsilon f(x)$

e) Deduzca la existencia de sucesiones $y_k \in X$ e $y_k^* \in \partial f(y_k)$ tales que $f(y_k) \to m$ y $\|y_k^*\| \to 0$

f) Decimos que f satisface la condición de Palais-Smale si toda sucesión y_k tal que $d(0, \partial f(y_k)) \to 0$ con $f(y_k)$ acotada, es relativamente compacta para la topología débil. Deduzca que si f es acotada inferiormente y satisface la condición de Palais-Smale, entonces el mínimo de f es alcanzado.