MA5801-1: Análisis Convexo y Dualidad
Profesor: Alejandro Jofré
Auxiliar: Nicolás Toro

Auxiliar 7

P1. [Teorema] Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función convexa y sea $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) \in \mathbb{R}$ y f continua en x_0. Muestre que $\partial f(x_0) \neq \emptyset$ y es compacto para la topología $\sigma(X^*, X)$.

P2. [Regla de Fermat] Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función convexa y propia. Consideremos el problema de minimización:

$$(\mathcal{P}) \quad \inf_X f$$

Muestre que x_0 es solución de $(\mathcal{P})$ ssi $0 \in \partial f(x_0)$. Si además $f \in \Gamma_0(X)$, entonces:

$$\arg\min_X f = \partial f^*(0)$$

el cual claramente es un convexo cerrado y acotado si f^* es finita y continua en 0.

P3. Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función convexa y propia. Sean $x_0 \in \operatorname{dom}(f)$ y $d \in X$. Entonces la derivada direccional en x_0 según d esta definida en $\overline{\mathbb{R}}$ mediante:

$$f'(x_0; d) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + td) - f(x_0)}{t} = \inf_{t > 0} \frac{f(x_0 + td) - f(x_0)}{t}$$

P4. Bajo las mismas hipótesis de la pregunta anterior, muestre que $f'(x_0; \cdot)$ es una función sublineal y que además se tiene que:

$$\partial f(x_0) = \{x^* \in X^* \mid \forall d \in X, \langle x^*, d \rangle \leq f'(x_0; d)\} = \partial[f'(x_0; \cdot)](0)$$