

MA5801-1: Análisis Convexo y Dualidad

Profesor: Alejandro Jofré

Auxiliar: Nicolás Toro



Auxiliar 4

P1. Sea (X, τ) un e.v.t. y $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función convexa.

a) Muestre que:

$$\text{cl}(f) = \sup\{g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \mid g \leq f, g \text{ s.c.i. y convexa}\}$$

b) Recuerde que $\text{co}(A) = \cap\{C \mid C \supseteq A, C \text{ convexo}\}$ y $\overline{\text{co}}(A) = \cap\{C \mid C \supseteq A, C \text{ convexo cerrado}\}$ y muestre que:

$$\text{co}(\text{dom}(f)) \subseteq \text{dom}(\text{cl}(f)) \subset \overline{\text{co}}(\text{dom}(f))$$

P2. Sea (X, d) un espacio métrico, sea $(F_n)_n$ una sucesión de funciones de X en $\overline{\mathbb{R}}$ y sea F función de X en $\overline{\mathbb{R}}$.

a) Sea $G : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, suponga que $\Gamma - \lim_{n \rightarrow \infty} F_n = F$ y que $F_n(x) \rightarrow G(x)$ para todo x . Muestre que $F \leq G$

b) Suponga que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |F_n(x) - F(x)| = 0$. Muestre que $\Gamma - \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n = \text{cl}(F)$

c) Concluya que si $F_n = F$ para todo n , entonces $\Gamma - \lim_{n \rightarrow \infty} F_n = \text{cl}(F)$

P3. Sea $(V, \|\cdot\|)$ un e.v.n. y sea $C \subseteq V$ convexo tal que $0 \in \text{int}(C)$. Se define $\gamma_C : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ como

$$\gamma_C(x) = \inf\{\lambda > 0 \mid x \in \lambda C\}$$

a) Muestre que γ_C es convexa

b) Muestre que $\text{int}(C) = \{x \mid \gamma_C(x) < 1\}$

c) Concluya que γ_C es continua

P4. Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$. Se dice que f es log-convexa si la función $x \mapsto \ln f(x)$ es convexa.

a) Muestre que una función log-convexa es convexa. Es cierta la recíproca?

b) Sea $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un polinomio con todas sus raíces reales. Muestre que $\frac{1}{p}$ es log-convexa para todo intervalo de medida finita donde $p > 0$

c) Muestre que la función Gamma definida como:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

es log-convexa en $\mathbb{R}_{>0}$.