MA5801-1: Análisis Convexo y Dualidad
Profesor: Alejandro Jofré
Auxiliar: Nicolás Toro

Auxiliar 2

P1. [Cono de recesión] Sea X e.v.n. y sea $C \subseteq X$ un convexo no vació. El objetivo es mostrar que:

$$C_\infty = \{d \in X \mid \forall t_k \to \infty, \exists x_k \in C \ : \ \lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{t_k} = d\}$$

Demuestre lo siguiente:

a) Sea $a_k \to \infty$ y $b_k \to \infty$, justifique que existe $\lim_{j\to\infty} k_j$ tal que $b_j \leq a_{k_j}$

b) Sea $d \in C_\infty$, utilice la siguiente construcción para concluir. Denotando por $(x_k)_k \subseteq C$ y $(t_k)_k$ las sucesiones tales que $t_k \to \infty$ y $d = \lim \frac{x_k}{t_k}$. Define:

$$y_j = \left(1 - \frac{s_j}{t_{k_j}}\right) x + \frac{s_j}{t_{k_j}} x_{k_j}$$

donde $x \in C$, s_j es una sucesión cualquiera tal que $s_j \to \infty$ y $(k_j)_j$ es una sucesión adecuada.

P2. [Función de recesión] Sea X un e.v.n. y $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funcion propia, s.c.i. y convexa.

a) Demuestre qye para todo $d \in X$ se cumple:

$$f_\infty(d) = \sup\{f(x+d) - f(x) \mid x \in \mathrm{dom}(f)\}$$

b) Demuestre que independientemente de $x \in \mathrm{dom}(f)$ se tiene que:

$$f_\infty(d) = \lim_{t\to+\infty} \frac{f(x+td) - f(x)}{t} = \sup_{t>0} \frac{f(x+td) - f(x)}{t}$$

c) Deduzca que $\forall d \in \mathrm{dom}(f)$ se tiene que:

$$f_\infty(d) = \lim_{t\to 0^+} t f(t^{-1} d)$$

Justifique que si $0 \in \mathrm{dom}(f)$ entonces se puede tomar $d \in X$