# *Video 4 Ecuaciones Dispersivas – Función Maximal*

Claudio Muñoz

CNRS y Universidad de Chile

March 24, 2020

**Función Maximal.** Dada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, definimos la función maximal de $f$, denotada $Mf$, como

$$Mf(x) := \sup_{r>0} |B_r(x)|^{-1} \int_{B_r(x)} |f(y)| dy.$$

La idea de de $Mf$ es promediar en bolas y tomar el mayor valor; el caso $r \downarrow 0$ es el más complicado.

$$Mf(x) := \sup_{r>0} |B_r(x)|^{-1} \int_{B_r(x)} |f(y)| dy.$$

**Propiedades.**

1. $M1 = 1$,
2. $\|Mf\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}$.
3. $M$ es subaditiva: $M(f+g) \leq Mf + Mg$.

**Q: ¿Qué pasa si $f \in L^p$, $1 \leq p < +\infty$?**

Caso $p = 1$: no funciona!

Veamos un contraejemplo.

$$Mf(x) := \sup_{r>0} |B_r(x)|^{-1} \int_{B_r(x)} |f(y)| dy.$$

**Ejemplo:** Si $d = 1$, $f(x) = 1_{[-1,1]}(x)$. Entonces $Mf \notin L^1(\mathbb{R})$.

Si $x \geq 1$,

$$|B_x(x)|^{-1} \int_{B_x(x)} |f(y)| dy = \frac{1}{2x} \int_0^1 1 dy = \frac{1}{2x},$$

que no integra en $[1, \infty)$.

Una solución a este problema es agrandar la clase $L^1$ para evitar que $M$ no quede mal definida.

Para ello, recordemos la **desigualdad de Chebichev.**

si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$,

$$\left|\{x \in \mathbb{R}^d \ : \ |f(x)| > \lambda\}\right| \leq \frac{\|f\|_{L^1}}{\lambda}.$$

Hay funciones que no están en $L^1$ pero "satisfacen Chebichev": si $f(x) = \frac{1}{|x|}$,

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R} \ : \ \frac{1}{|x|} > \lambda\right\}\right| = \left|\left\{x \in \mathbb{R}^d \ : \ |x| < \frac{1}{\lambda}\right\}\right| = \frac{2}{\lambda}.$$

Luego, existe $C > 0$ tal que

$$|\{x \in \mathbb{R} \ : \ |f(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda}.$$

(Chebichev generalizada).

Diremos que $f \in L^p_{debil}$, $1 \leq p < +\infty$, si existe $C > 0$ tal que

$$\left|\{x \in \mathbb{R}^d \ : \ |f(x)| > \lambda\}\right| \leq \frac{C}{\lambda^p}.$$

**Teorema 1.** Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, entonces $Mf \in L^1_{debil}(\mathbb{R}^d)$ y existe $C = C(d) > 0$ tal que

$$\left|\{x \in \mathbb{R}^d \ : \ |Mf(x)| > \lambda\}\right| \leq \frac{C\|f\|_{L^1}}{\lambda}.$$

**Teorema 2.** Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < +\infty$, entonces $Mf \in L^p(\mathbb{R}^d)$ y existe $C = C(d,p) > 0$ tal que

$$\|Mf\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}.$$

Una consecuencia muy importante del Teorema 2 es la llamada **desiguadad de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg**: Existe $C > 0$ tal que

$$\| |\cdot|^{-\gamma} \star f \|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq C \| f \|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

siempre que $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - 1 + \frac{\gamma}{d}$, $0 < \gamma < d$.

**Demostración.** Estimemos

$$\int \frac{|f(x-y)|}{|y|^\gamma} = \int_{|y|<R} \frac{|f(x-y)|}{|y|^\gamma} + \int_{|y|>R} \frac{|f(x-y)|}{|y|^\gamma} =: A + B.$$

**Estimemos** $B$: Usando Hölder,

$$B = \int_{|y|>R} \frac{|f(x-y)|}{|y|^\gamma} \leq \left(\int |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_{|y|>R} \frac{dy}{|y|^{\gamma p'}}\right)^{1/p'},$$

pero

$$\left(\int_{|y|>R} \frac{dy}{|y|^{\gamma p'}}\right)^{1/p'} \sim \left(\int_R^\infty \frac{r^{d-1}dr}{r^{\gamma p'}}\right)^{1/p'} \sim R^{d/p'-\gamma}.$$

Ahora, como $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - 1 + \frac{\gamma}{d}$,

$$\frac{d}{p'} - \gamma = d\left(\frac{1}{p'} - \frac{\gamma}{d}\right) = d\left(1 - \frac{1}{p} - \frac{\gamma}{d}\right) = -\frac{d}{q}.$$

Luego,

$$B \lesssim \|f\|_{L^p} R^{-d/q}.$$

Estimemos ahora $A$, usando el Teorema 2:

$$A = \int_{|y|<R} \frac{|f(x-y)|}{|y|^\gamma} = \sum_{j\geq 0} \int_{2^{-j-1}R<|y|<2^{-j}R} \frac{|f(x-y)|}{|y|^\gamma}.$$

Usando que $|y| \geq 2^{-j-1}R$,

$$A \leq \sum_{j\geq 0} (R2^{-j-1})^{-\gamma} \int_{|y|<2^{-j}R} |f(x-y)|$$

y usando función maximal,

$$A \leq \sum_{j\geq 0} (R2^{-j-1})^{-\gamma} (2^{-j}R)^d Mf(x).$$

Luego,

$$A \lesssim R^{d-\gamma} Mf(x) \sum_{j\geq 0} 2^{-j(d-\gamma)} \lesssim R^{d-\gamma} Mf(x).$$

Luego,

$$A + B \leq CR^{-d/q}\|f\|_{L^p} + CR^{d-\gamma}Mf(x).$$

Optimizando en $R$, debemos escoger

$$CR^{-d/q}\|f\|_{L^p} \sim CR^{d-\gamma}Mf(x).$$

Esto nos da

$$R^{d+d/q-\gamma} \sim Mf(x)\|f\|_{L^p}^{-1} \implies R \sim \left(Mf(x)\|f\|_{L^p}^{-1}\right)^{p/d}.$$

Concluimos entonces que

$$\int \frac{|f(x-y)|}{|y|^\gamma} = A + B \lesssim \|f\|_{L^p}^{1-p/q} Mf(x)^{p/q}.$$

Luego,

$$\int \left( \int \frac{|f(x-y)|}{|y|^\gamma} \right)^q dx \lesssim \|f\|_{L^p}^{q-p} \int_X Mf(x)^p dx \lesssim \|f\|_{L^p}^{q-p} \|Mf\|_{L^p}^p.$$

Usando el Teorema 2,

$$\int \left( \int \frac{|f(x-y)|}{|y|^\gamma} \right)^q dx \lesssim \|f\|_{L^p}^{q-p} \|f\|_{L^p}^p \lesssim \|f\|_{L^p}^q.$$

Esto prueba HLS.

**Próximo video:** Demostración de los Teoremas 1 y 2.