Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA4802-1 Ecuaciones en Derivadas Parciales
20 de marzo de 2020

Clase Auxiliar #1: Transformada de Fourier y espacios de Sobolev

Profesor: Claudio Muñoz
Auxiliar: María Eugenia Martínez

P1. Caracterización de H^s por la transformada de Fourier

Sea $d \in \mathbb{N}$ y s un entero no-negativo, consideramos

$$H^s(\mathbb{R}^d) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^d) \text{ tal que } D^s u \in L^2(\mathbb{R}^d)\}$$

con la norma

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} = \left(\sum_{|\alpha| \le s} \int_{\mathbb{R}^d} |D^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

a) Una función $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ pertenece a $H^s(\mathbb{R}^d)$ si y sólo si

$$(1 + |\xi|^s)\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

b) Existe una constante positiva C tal que

$$\frac{1}{C}\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \le \|(1 + |\xi|^s)\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \le C\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}$$

para cada $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$.

Solución:

Primer paso: $u \in H^s(\mathbb{R}^d) \Rightarrow (1 + |\xi|^2)^{s/2}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)$:

Sea $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$. Tenemos que $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ para todo multiíndice α, $|\alpha| \le s$. Además,

$$\widehat{D^\alpha u}(x) = (i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi).$$

Por lo tanto, $(i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ para cualquier $|\alpha| \le s$. En particular, tomando $\alpha = (s, 0, \dots, 0), (0, s, \dots, 0), \dots, (0, \dots, s)$, se deduce por Plancharel que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \le C \int_{R^d} |D^s u(x)|^2 \, dx \le C\|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

Entonces, por la desigualdad de Minkowski: $(x + y)^a \le 2^{a-1}(x^a + y^a)$, obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \le 2^{s-1} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^{2s}) |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \le 2^s C\|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

Por lo tanto, $(1 + |\xi|^2)^{s/2} u \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Segundo paso: $(1 + |\xi|^2)^{s/2}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d) \Rightarrow u \in H^s(\mathbb{R}^d)$:

Supongamos, ahora, que $(1 + |\xi|^2)^{s/2}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, y tomamos α un multiíndice tal que $|\alpha| \le s$. Luego,

$$\|(|i\xi|)^\alpha \hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \le \int_{R^d} |\xi|^{2|\alpha|} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \le \int_{R^d} (1 + |\xi|^2)^{|\alpha|} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \le \|(1 + |\xi|^2)^{s/2}\hat{u}\|^2_{L^2}. \tag{1}$$

Llamemos $u_\alpha := ((1\xi)^\alpha \hat{u})^\vee$. Luego, para cualquier $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, por la identidad de polarización, se tiene

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} (D^\alpha \phi(x))\overline{u}(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^d} (\widehat{D^\alpha \phi(x)})\overline{\hat{u}}(\xi)d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (i\xi)^\alpha \hat{\phi}(\xi)\overline{\hat{u}}(\xi)d\xi = (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\overline{u}_\alpha(x)dx.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $u_\alpha = D^\alpha u$ en el sentido débil y por (1), tenemos que $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R})$. Así, se concluye $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$.

P2. Sea $d \in \mathbb{N}$. El espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ es un espacio de Hilbert si se le asigna el producto punto asociado a la norma

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} = \|(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \tag{2}$$

Solución:

Veamos que $H^s(\mathbb{R}^d)$ es un espacio de Banach con la norma (2). Necesitamos probar, entonces, que es completo. Tomemos una sucesión de Cauchy $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H^s(\mathbb{R}^d)$ y veamos que converge en $H^s(\mathbb{R}^d)$. Como $L^2(\mathbb{R}^d)$ es completo y $\{\hat{u}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $L^2(\mathbb{R}^d)$, converge a $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Pero, además, se tiene que $\{(1+|\cdot|^2)^{s/2}\hat{u}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también es de Cauchy en $L^2(\mathbb{R}^d)$ (por definición de la norma H^s). Por lo tanto, existe u_s tal que $(1+|\cdot|^2)^{s/2}\hat{u}_n \to u_s$. Bastaría probar que

$$(1+|\cdot|^2)^{s/2}\hat{u} = u_s.$$

Definimos $T_s : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ un operador lineal contínuo por:

$$T_s u = (1+|\cdot|^2)^{s/2}\hat{u}.$$

Como $\mathcal{S}$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^d)$, T_n se puede extender de manera única a todo $L^2(\mathbb{R}^d)$. Por lo tanto, $T_s\hat{u} = u_s$ y se concluye.

Finalmente, como H^s es de Banach, por el Teorema de Von Neumann, H^s es un espacio de Hilbert, con el producto definido por la norma (2).

P3. Sea $d \in \mathbb{N}$ y $s > d/2$. Pruebe que si $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$, entonces $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Además,

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \|\hat{u}\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

Más aun, si $s > d/2 + r$, entonces $H^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow C^r(\mathbb{R}^d)$.

Solución:

Escribimos

$$|u(x)| = \left|\check{\hat{u}}(x)\right| \leq c_d \int_{\mathbb{R}^d} \left|e^{ix\cdot\xi}\hat{u}(\xi)\right| d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(\xi)|d\xi = \|\hat{u}\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Por otro lado, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(\xi)|d\xi &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{u}(\xi)|(1+|\xi|^2)^{s/2}}{(1+|\xi|^2)^{s/2}}d\xi \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d}\left(|\hat{u}(\xi)|(1+|\xi|^2)^{s/2}\right)^2 d\xi\right)^{1/2} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{(1+|\xi|^2)^s}d\xi\right)^{1/2}}_{I}\end{aligned}$$

Tenemos que $I \leq \infty$. En efecto, usando coordenadas polares, obtenemos

$$I = \left|\mathbb{S}^{d-1}\right| \int_0^R \frac{r^{d-1}}{(1+r^2)^s}dr$$

pero esto es finito, porque $s > d/2$. Luego,

$$\|\hat{u}\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq I\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

Por lo tanto, probamos que

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \|\hat{u}\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}$$

P4. Sea $d \in \mathbb{N}$ y $s > d/2$. Pruebe que $H^s(\mathbb{R}^d)$ es un álgebra de Banach con respecto al producto de funciones. Esto es, si si $u, v \in H^s(\mathbb{R}^d)$, entonces $uv \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Además,

$$\|uv\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \leq C(s,d)\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \leq \|v\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

Solución: Usamos propiedad sobre la convolución:

$$\widehat{f * g}(\xi) = C_1(d)\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi),$$
$$\left(\hat{f} * \hat{g}\right)(\xi) = C_2(d)\widehat{fg}(\xi),$$

y obtenemos

$$\|uv\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)} = \left\|(1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{uv}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d}(1+|\xi|^2)^s|\widehat{uv}|^2 d\xi = C_2(d)\int_{\mathbb{R}^d}(1+|\xi|^2)^s|\hat{u} * \hat{v}|^2 d\xi.$$

Desarrollemos la convolución,

$$\|uv\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)} = C_2(d)\int_{\mathbb{R}^d}\left|\int_{\mathbb{R}^d}(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}(\xi-\eta)\hat{v}(\xi)d\eta\right|^2 d\xi. \tag{3}$$

Ahora, por la desigualdad de Minkowski, tenemos que

$$(1+|\xi|^2)^{s/2} \leq \left(1+(|\xi-\eta|+|\eta|)^2\right)^{s/2} \leq \left(1+2|\xi-\eta|^2+2|\eta|^2\right)^{s/2} \leq 2^{s/2}\left[\left(1+|\xi-\eta|^2\right)^{s/2} + \left(1+|\eta|^2\right)^{s/2}\right].$$

Asé, reemplazando en (3) (notar que, de ahora en más, denotaremos por C a cualquier constante positiva, pudiendo cambiar de línea en línea),

$$\begin{aligned}
\|uv\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)} &\leq C(s,d)\int_{\mathbb{R}^d}\left|\int_{\mathbb{R}^d}\left[\left(1+|\xi-\eta|^2\right)^{s/2} + \left(1+|\eta|^2\right)^{s/2}\right]\hat{u}(\xi-\eta)\hat{v}(\xi)d\eta\right|^2 d\xi \\
&\leq C(s,d)\left[\int_{\mathbb{R}^d}\left|\int_{\mathbb{R}^d}(1+|\xi-\eta|^2)^s\hat{u}(\xi-\eta)\hat{v}(\xi)d\eta\right|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}^d}\left|\int_{\mathbb{R}^d}(1+|\eta|^2)^s\hat{u}(\xi-\eta)\hat{v}(\xi)d\eta\right|^2 d\xi\right] \\
&\leq C(s,d)\left[\int_{\mathbb{R}^d}\left|\left((1+|\cdot|^2)^s\hat{u}\right) * \hat{v}\right|^2(\xi)d\xi + \int_{\mathbb{R}^d}\left|\left((1+|\cdot|^2)^s\hat{v}\right) * \hat{u}\right|^2 d\xi\right].
\end{aligned}$$

Luego, se tiene que

$$\|uv\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)} = C(s,d)\Big(\|\left((1+|\cdot|^2)^{s/2}\hat{u}\right) * \hat{v}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\left((1+|\cdot|^2)^{s/2}\hat{v}\right) * \hat{u}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}.\Big)$$

Por la desigualdad de Young para convoluciones,

$$\|uv\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)} = C(s,d)\Big(\|(1+|\cdot|^2)^{s/2}\hat{u}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\|\hat{v}\|^2_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \|(1+|\cdot|^2)^{s/2}\hat{v}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\|\hat{u}\|^2_{L^1(\mathbb{R}^d)}.\Big)$$

Finalmente, gracias al inciso **P3.** y por la definición de la norma en H^s,

$$\|uv\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)} = C(s,d)\|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)}\|v\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$