Video 5 Ecuaciones Dispersivas – Función Maximal II

Claudio Muñoz

CNRS y Universidad de Chile

March 29, 2020

Función Maximal. Dada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, definimos la función maximal de f, denotada Mf, como

$$Mf(x) := \sup_{r>0} |B_r(x)|^{-1} \int_{B_r(x)} |f(y)| dy.$$

La idea de de Mf es promediar en bolas y tomar el mayor valor; el caso $r \downarrow 0$ es el más complicado.

$$Mf(x) := \sup_{r>0} |B_r(x)|^{-1} \int_{B_r(x)} |f(y)| dy.$$

Propiedades.

1. $M1 = 1$,
2. $\|Mf\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}$.
3. M es subaditiva: $M(f+g) \leq Mf + Mg$.
4. M no está bien definida de L^1 en L^1.

Diremos que $f \in L^p_{debil}$, $1 \leq p < +\infty$, si existe $C > 0$ tal que

$$\left| \{x \in \mathbb{R}^d \ : \ |f(x)| > \lambda\} \right| \leq \frac{C}{\lambda^p}.$$

Teorema 1. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, entonces $Mf \in L^1_{debil}(\mathbb{R}^d)$ y existe $C = C(d) > 0$ tal que

$$\Big|\{x \in \mathbb{R}^d \ : \ Mf(x) > \lambda\}\Big| \leq \frac{C\|f\|_{L^1}}{\lambda}.$$

Teorema 2. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < +\infty$, entonces $Mf \in L^p(\mathbb{R}^d)$ y existe $C = C(d,p) > 0$ tal que

$$\|Mf\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}.$$

Una consecuencia muy importante del Teorema 2 es la llamada **desiguadad de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg**: Existe $C > 0$ tal que

$$\||\cdot|^{-\gamma} \star f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

siempre que $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - 1 + \frac{\gamma}{d}$, $0 < \gamma < d$.

Teorema 2. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < +\infty$, entonces $Mf \in L^p(\mathbb{R}^d)$ y existe $C = C(d,p) > 0$ tal que

$$\|Mf\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}.$$

Demostración del Teo 2 usando Teo 1:

Paso 1. Para $1 < p < +\infty$,

$$\int |u(x)|^p dx = \int_0^\infty p\lambda^{p-1} \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^d \ : \ |u(x)| \geq \lambda \right\} \right| d\lambda.$$

En efecto, primero,

$$\int |u(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^{|u(x)|} p\lambda^{p-1} d\lambda \right) dx$$

Luego,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^{|u(x)|} p\lambda^{p-1} d\lambda \right) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^{\infty} p\lambda^{p-1} 1_{\lambda \leq |u(x)|} d\lambda\, dx,$$

y usando Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_0^{\infty} p\lambda^{p-1} 1_{\lambda \leq |u(x)|} d\lambda\, dx = \int_0^{\infty} p\lambda^{p-1} \int_{\mathbb{R}^d} 1_{|u(x)| \geq \lambda} dx d\lambda.$$

Concluimos que

$$\int |u(x)|^p dx = \int_0^{\infty} p\lambda^{p-1} \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^d \ : \ |u(x)| \geq \lambda \right\} \right| d\lambda.$$

Paso 2. Sea $f \in L^p$, $1 < p < +\infty$. Entonces

$$f = f^\lambda + f_\lambda, \quad f^\lambda \in L^1, \quad f_\lambda \in L^\infty,$$

con $f_\lambda = f 1_{|f| \leq \lambda/2}$, y $f^\lambda = f - f_\lambda$. Entonces $\|f_\lambda\|_{L^\infty} \leq \frac{\lambda}{2}$ y

$$+\infty > \int |f|^p = \int |f||f|^{p-1} \geq \int_{|f| \geq \frac{\lambda}{2}} |f||f|^{p-1},$$

de donde

$$+\infty > \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{p-1} \int_{|f| \geq \frac{\lambda}{2}} |f| = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{p-1} \int |f^\lambda|.$$

Paso 3. Si $x \in \mathbb{R}^d$ es tal que $Mf(x) \geq \lambda$, entonces $M(f^\lambda + f_\lambda)(x) \geq \lambda$, y por subaditividad,

$$Mf^\lambda(x) + Mf_\lambda(x) \geq \lambda.$$

Como $\|Mf_\lambda\|_{L^\infty} \leq \|f_\lambda\|_{L^\infty} = \frac{\lambda}{2}$, tenemos

$$Mf^\lambda(x) \geq \frac{\lambda}{2}.$$

Concluimos que

$$\left\{x \in \mathbb{R}^d \ : \ Mf \geq \lambda\right\} \subseteq \left\{x \in \mathbb{R}^d \ : \ Mf^\lambda \geq \frac{\lambda}{2}\right\}.$$

Usaremos esto!!!

Paso 4. Conclusión final. Tenemos primero del paso 1,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Mf(x)|^p dx = \int_0^\infty p\lambda^{p-1} \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^d \ : \ |Mf(x)| \geq \lambda \right\} \right| d\lambda.$$

Usando el paso 3,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Mf(x)|^p dx \leq \int_0^\infty p\lambda^{p-1} \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^d \ : \ |Mf^\lambda(x)| \geq \frac{\lambda}{2} \right\} \right| d\lambda.$$

Usamos ahora el Teo. 1:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Mf(x)|^p dx \leq C \int_0^\infty p\lambda^{p-1} \frac{\|f^\lambda\|_{L^1}}{\lambda/2} d\lambda.$$

Por lo tanto,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Mf(x)|^p dx \leq C \int_0^\infty p\lambda^{p-2} \int_{|f(x)| \geq \frac{\lambda}{2}} |f(x)| dx d\lambda.$$

Luego,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Mf(x)|^p dx \leq C \int_0^\infty p\lambda^{p-2} \int 1_{|f(x)|\geq \frac{\lambda}{2}} |f(x)| dx d\lambda.$$

Usando Fubini nuevamente,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Mf(x)|^p dx \leq C \int |f(x)| \int_0^\infty \lambda^{p-2} 1_{\lambda \leq 2|f(x)|} d\lambda \, dx,$$

de donde

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Mf(x)|^p dx \leq C \int |f(x)||f(x)|^{p-1} dx = C\|f\|_{L^p}^p.$$

Teorema 1. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, entonces $Mf \in L^1_{debil}(\mathbb{R}^d)$ y existe $C = C(d) > 0$ tal que

$$\left|\{x \in \mathbb{R}^d \ : \ Mf(x) > \lambda\}\right| \leq \frac{C\|f\|_{L^1}}{\lambda}.$$

Demostración del Teo. 1. Necesitaremos el siguiente lema de Vitali:

Sea $\mathscr{B} := (B_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una familia infinita de bolas euclideanas que cubren un conjunto medible E, y tal que

$$\sup_{\alpha\in\Lambda} diam(B_\alpha) < +\infty.$$

Entonces existe una subfamilia numerable $(B_n)_{n\in N}$ de $\mathscr{B}$, disjuntas dos a dos y tales que

$$|E| \leq C(d) \sum_{n\geq 0} |B_n|.$$

Asumiendo del Lema, sea (medible!)

$$E_\lambda := \left|\{x \in \mathbb{R}^d \ : \ Mf(x) > \lambda\}\right|.$$

Si $x \in E_\lambda$, $Mf(x) > \lambda$, es decir, existe $r_x > 0$ tal que

$$\frac{1}{\lambda}\int_{B_{r_x}(x)} |f(y)|dy > |B_{r_x}(x)|.$$

De aquí, $\sup_x diam B_{r_x}(x) < +\infty$. Usando la familia $\mathscr{B} := (B_{r_x}(x))_{x\in E_\lambda}$, y usando el lema, existe una subfamilia numerable $(B_{r_n})_{n\in N}$ de $\mathscr{B}$, disjuntas dos a dos y tales que

$$|E_\lambda| \leq C(d)\sum_{n\geq 0}|B_{r_n}| \leq \frac{C}{\lambda}\sum_{n\geq 0}\int_{B_{r_n}}|f(y)|dy.$$

Usando que las bolas son disjuntas,

$$|E_\lambda| \leq \frac{C}{\lambda}\int |f(y)|dy.$$

Próximo video: Demostración de Vitali y entrada a Riesz-Thorin.