

Video 6 Ecuaciones Dispersivas – Función Maximal III y Riesz-Thorin

Claudio Muñoz

CNRS y Universidad de Chile

April 8, 2020

Estábamos en

Teorema 1. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, entonces $Mf \in L^1_{debil}(\mathbb{R}^d)$ y existe $C = C(d) > 0$ tal que

$$\left| \{x \in \mathbb{R}^d : Mf(x) > \lambda\} \right| \leq \frac{C \|f\|_{L^1}}{\lambda}.$$

Para demostrar el Teo. 1 necesitábamos el siguiente lema de Vitali:

Sea $\mathcal{B} := (B_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ una familia infinita de bolas euclidianas que cubren un conjunto medible E , y tal que

$$\sup_{\alpha \in \Lambda} \text{diam}(B_\alpha) < +\infty.$$

Entonces existe una subfamilia numerable $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{B}$, disjuntas dos a dos y tales que

$$|E| \leq C(d) \sum_{n \geq 0} |B_n|.$$

Quedamos de probar el lema de Vitali para concluir.

Demostración de Vitali.

Sea B_0 una bola de la familia $\mathcal{B} := (B_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ tal que

$$\text{diam}(B_0) > \frac{1}{2} \sup_{\alpha \in \Lambda} \text{diam}(B_\alpha).$$

(Se puede por ser supremo).

Sea $\Lambda_1 := \{\alpha \in \Lambda : B_\alpha \cap B_0 = \emptyset\}$, es decir, los índices de bolas que no intersectan B_0 .

Sea ahora B_1 una bola de la familia $\mathcal{B}$ tal que

$$\text{diam}(B_1) > \frac{1}{2} \sup_{\alpha \in \Lambda_1} \text{diam}(B_\alpha),$$

y sea $\Lambda_2 := \{\alpha \in \Lambda_1 : B_\alpha \cap B_1 = \emptyset\}$, y así sucesivamente.

Si $\Lambda_k = \emptyset$ para algún k paramos. Entonces la subfamilia $\beta := \{B_0, B_1, \dots\}$ funciona.

Veamos si funciona. Tenemos esencialmente dos casos: β finita, y β infinita.

Si β es finita, digamos $\beta = \{B_0, B_1, \dots, B_n\}$, el conjunto Λ_n contiene sólo índices α tales que $B_n \cap B_\alpha \neq \emptyset$.

Sea $\alpha \in \Lambda_n$ fijo. Sea $i_0 \in \{0, 1, \dots, n\}$ el índice más pequeño para el cual $B_{i_0} \cap B_\alpha \neq \emptyset$. Pero

$$\text{diam}(B_{i_0}) > \frac{1}{2} \sup_{\gamma \in \Lambda_{i_0}} \text{diam}(B_\gamma) \geq \frac{1}{2} \text{diam}(B_\alpha).$$

(α pertenece a Λ_{i_0} , pues todos los B_i , $i = 0, 1, \dots, i_0 - 1$ satisfacen $B_i \cap B_\alpha = \emptyset$).

Vamos a incluir B_α en alguna dilatación de B_{i_0} , particularmente, $B_\alpha \subseteq 5B_{i_0}$ (ver figura). Como

$$|E| \leq |\cup_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha| \leq |\cup_{i=0}^n 5B_i| \leq 5^d \sum_{i=0}^n |B_i|.$$

Esto prueba el caso finito.

En el caso β infinito, tenemos dos subcasos: $\sum_{n \geq 0} |B_n| = +\infty$ (nada que probar), y $\sum_{n \geq 0} |B_n| < +\infty$.

En el segundo subcaso, WLOG suponemos $\text{diam } B_n \downarrow 0$.

Supongamos que existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $B_\alpha \cap B_n = \emptyset$ para todo n . Sea entonces i_0 el mínimo índice tal que

$$\text{diam}(B_\alpha) > 3\text{diam}(B_i), \quad \forall i \geq i_0.$$

Pero

$$3\text{diam}(B_{i_0}) > \frac{3}{2} \sup_{\gamma \in \Lambda_{i_0}} \text{diam}(B_\gamma) \geq \frac{3}{2} \text{diam}(B_\alpha),$$

pues $\alpha \in \Lambda_{i_0}$. Esto es contradicción.

Luego, $B_\alpha \cap B_{j_0} \neq \emptyset$ para algún mínimo j_0 . Repitiendo el argumento del 5, se obtiene el resultado.

Teorema de Riesz-Thorin, o interpolación compleja.

Sea $T : L^{p_0} + L^{p_1} \rightarrow L^{q_0} + L^{q_1}$ un operador lineal acotado de L^{p_0} a L^{q_0} , y de L^{p_1} a L^{q_1} , con $1 \leq p_0, q_0, p_1, q_1 \leq \infty$, y con cotas M_0 y M_1 respectivas. **Entonces T está bien definido de L^p a L^q , donde**

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, \quad \theta \in (0,1),$$

con cota

$$\|T\|_{L^p \rightarrow L^q} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta, \quad \|T\|_{L^p \rightarrow L^q} := \sup_{\|f\|_{L^p}=1} \|Tf\|_{L^q}.$$

Aplicación importante La solución de Schrödinger lineal en $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d$

$$i\partial_t u + \Delta_x u = 0, \quad u(t=0) = u_0$$

vía Fourier era

$$u(t, x) = e^{it\Delta} u_0(x) = \frac{c_d}{t^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i \frac{|x-y|^2}{4\pi t}} u_0(y) dy.$$

De aquí, se ve naturalmente que $e^{it\Delta} : L^1 \rightarrow L^\infty$, pues

$$\|e^{it\Delta} u_0\|_{L_x^\infty} \lesssim \frac{\|u_0\|_{L_x^1}}{|t|^{d/2}} =: M_0.$$

Por otro lado, del hecho que la norma L^2 de u es conservada (ejercicio)

$$\|u(t)\|_{L_x^2} = \|e^{it\Delta} u_0\|_{L_x^2} = \|u_0\|_{L_x^2},$$

tenemos que $e^{it\Delta} : L^2 \rightarrow L^2$ (es isometría) y $M_1 = 1$.

Luego, usando Riesz-Thorin con $p_0 = 1$, $q_0 = +\infty$, $p_1 = 2 = q_1$, tenemos que

$$\frac{1}{p} = 1 - \theta + \frac{\theta}{2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{\theta}{2}, \quad \theta \in (0, 1),$$

de donde $\theta = 2/q$, y

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \implies q = p'.$$

Luego,

$$e^{it\Delta} : L^p \rightarrow L^{p'}, \quad 1 \leq p \leq 2,$$

con cota

$$\|e^{it\Delta} u_0\|_{L^{p'}} \lesssim \frac{2}{|t|^{\frac{d}{2}(1/p - 1/q)}}.$$

Ejercicio. Hacer lo mismo para Fourier $\mathcal{F}$.

Para demostrar RT, se usa un lema de variable compleja, llamado el **lema de las tres lineas**.

Sea $F = F(z) \in \mathbb{C}$ una función acotada y analítica en la banda $0 < \operatorname{Re} z < 1$, continua en $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$, y tal que

$$|F(iy)| \leq M_0, \quad |F(1+iy)| \leq M_1, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Entonces para todo $z = x + iy$, $0 \leq x \leq 1$, se tiene

$$|F(z)| \leq M_0^{1-x} M_1^x.$$

Usando este lema, se estima $\langle Tf, g \rangle$, con $f \in L^p$ y $g \in L^{p'}$.

Se asume que f, g son funciones simples, para luego extenderlas al plano complejo como $\tilde{f}(x, z), \tilde{g}(x, z)$ con un parámetro adicional z complejo. Se define

$$F(z) := \langle T\tilde{f}(z), \tilde{g}(z) \rangle_x,$$

y se usa el lema de las tres líneas con F . Para la demostración completa, ver Linares-Ponce.

Próximo video: Estimaciones de Strichartz.