Video 7 Ecuaciones Dispersivas – Estimaciones de Strichartz I

Claudio Muñoz

CNRS y Universidad de Chile

April 14, 2020

Recordemos el **Teorema de Riesz-Thorin**, o interpolación compleja.

Sea $T : L^{p_0} + L^{p_1} \to L^{q_0} + L^{q_1}$ un operador lineal acotado de L^{p_0} a L^{q_0}, y de L^{p_1} a L^{q_1}, con $1 \leq p_0, q_0, p_1, q_1 \leq \infty$, y con cotas M_0 y M_1 respectivas. **Entonces T está bien definido de L^p a L^q,** donde

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, \quad \theta \in (0,1),$$

con cota

$$\|T\|_{L^p \to L^q} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}, \quad \|T\|_{L^p \to L^q} := \sup_{\|f\|_{L^p}=1} \|Tf\|_{L^q}.$$

Aplicación importante La solución de Schrödinger lineal en $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d$

$$i\partial_t u + \Delta_x u = 0, \qquad u(t=0) = u_0$$

vía Fourier era

$$u(t,x) = e^{it\Delta} u_0(x) = \frac{c_d}{t^{d/2}} \int_y e^{i\frac{|x-y|^2}{4\pi t}} u_0(y) dy.$$

De aquí, se ve naturalmente que $e^{it\Delta} : L^1 \to L^\infty$, pues

$$\|e^{it\Delta} u_0\|_{L_x^\infty} \lesssim \frac{\|u_0\|_{L_x^1}}{|t|^{d/2}} =: M_0.$$

Por otro lado, del hecho que la norma L^2 de u es conservada (ejercicio)

$$\|u(t)\|_{L_x^2} = \|e^{it\Delta} u_0\|_{L_x^2} = \|u_0\|_{L_x^2},$$

tenemos que $e^{it\Delta} : L^2 \to L^2$ (es isometría) y $M_1 = 1$.

Luego, usando Riesz-Thorin con $p_0 = 1$, $q_0 = +\infty$, $p_1 = 2 = q_1$, tenemos que

$$\frac{1}{p} = 1 - \theta + \frac{\theta}{2}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{\theta}{2}, \quad \theta \in (0,1),$$

de donde $\theta = 2/q$, y

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \implies q = p'.$$

Luego,

$$e^{it\Delta} : L^p \to L^{p'}, \quad 1 \leq p \leq 2,$$

con cota

$$\|e^{it\Delta} u_0\|_{L^{p'}} \lesssim \frac{2}{|t|^{\frac{d}{2}(1/p - 1/p')}}.$$

Ecuaciones no lineales: focalizante versus defocalizante

La característica principal de la ecuación

$$i\partial_t u + \Delta_x u = 0, \qquad u(t=0) = u_0$$

es su carácter *lineal*, en el sentido que suma de soluciones es también solución.

Sin embargo, a menudo en aplicaciones uno se encuentra con sistemas donde pequeñas perturbaciones inducen términos no lineales en las ecuaciones.

Es así que, como por ejemplo en óptica no lineal (estudio de haces de luz por ejemplo), la descripción de la amplitud de onda de un rayo viene dada por una ecuación de Schrödinger no-lineal

$$
\begin{aligned}
&i\partial_t u + \Delta u \pm |u|^2 u = 0, \quad u = u(t,x) \in \mathbb{C}, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^3, \\
&u(t=0,x) = u_0(x).
\end{aligned}
$$

Ahora la suma de soluciones no es solución de manera general.

La ecuación anterior con signo $+$ en la nolinealidad se denomina usualmente **focalizante**, mientras que el signo $-$ es el **defocalizante**, por razones que veremos más en detalle adelante.

Sin embargo, para los propósitos de este capítulo, no existirá diferencia significativa entre ambos signos.

Estimaciones de Strichartz

La idea principal es darles una noción de cómo construir una solución para NLS no lineal, al menos durante un período pequeño de tiempo.

Para ello, debemos ver la EDP de una manera más general, muy similarmente a cuando se resuelve una EDO usando el Teorema de Cauchy-Lipschitz-Picard. Para

$$
\begin{aligned}
&i\partial_t u + \Delta u = f, \qquad f(t,x) = f(u(t,x)) = \mp|u(t,x)|^2 u(t,x),\\
&u(t=0,x) = u_0(x),
\end{aligned}
$$

deseamos aplicar la misma estrategia del caso lineal.

Como explicamos más arriba, el signo en frente de f no será de importancia en lo que sigue, por lo que asumiremos sin pérdida de generalidad que es positivo.

Usando la transformada de Fourier sólo en la variable x, uno obtiene

$$i\hat{u}_t(t,\xi) - |\xi|^2\hat{u}(t,x) = \hat{f}(t,\xi).$$

Para resolver esta EDO en t uno utiliza la fórmula de factor integrante:

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-it|\xi|^2}\hat{u}_0(\xi) + \int_0^t e^{-i|\xi|^2(t-s)}\hat{f}(s,\xi)ds.$$

Usando la misma analogía como en el caso lineal, uno tiene que $u(t) = u(t,\cdot)$ satisface la ecuación implícita

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(u(s))ds, \qquad S(t) := e^{it\Delta},$$

donde usamos el hecho (ejercicio, o ver curso de ecuaciones de evolución) que

$$S(t)S(-s) = S(t-s).$$

Esta forma de escribir el problema se llama **formulación de Duhamel** de NLS, y es el punto de partida para intentar encontrar una solución a *casi todas* las ecuaciones dispersivas. Si denotamos por $\mathscr{T}$ el operador

$$\mathscr{T}[u](t) := S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(u(s))ds, \quad f(u(s)) = |u(s)|^2 u(s),$$

entonces para encontrar una solución de NLS basta encontrar un punto fijo de $\mathscr{T}$ en un espacio funcional conveniente:

$$u(t) = \mathscr{T}[u](t).$$

Este cuadro de trabajo estará dado por espacios vectoriales que mezclen integración en tiempo y en espacio, una propiedad que las estimaciones de la sección anterior parecen no poder garantizar. Para ello necesitaremos nuevas estimaciones.

Para un intervalo de tiempo $I \subseteq \mathbb{R}$, definamos el espacio $L^q_I L^r_x$ como sigue: decimos que $g = g(t,x) \in L^q_I L^r_x$ si

$$\left(\int_I \left(\int |g(t,x)|^r dx \right)^{q/r} dt \right)^{1/q} < +\infty.$$

Cuando I está implícitamente claro, denotaremos simplemente $L^q_I L^r_x = L^q_t L^r_x$. Recordemos que el exponente de Sobolev 2^* viene dado por

$$2^* := \begin{cases} 2d/(d-2), & d \geq 3, \\ +\infty, & d = 1, 2. \end{cases}$$

Por otro lado, diremos que el par (q, r), con $2 \leq q \leq +\infty$, $2 \leq r < 2^*$ si $d \geq 2$, o bien $2 \leq r \leq 2^*$ si $d = 1$, es **admisible** si

$$\frac{2}{q} = d\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right).$$

Por ejemplo, en dimensión $d = 3$, los pares $(8, \frac{12}{5})$, $(\infty, 2)$ y $(\frac{4}{3}, \infty)$ son admisibles. En lo que sigue, trabajaremos con el punto $(8, \frac{12}{5})$.

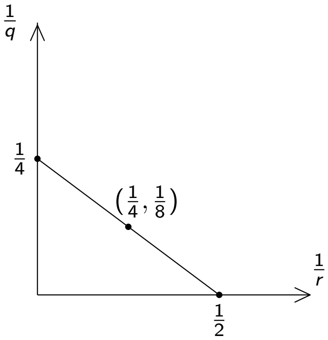

FIGURE: El conjunto de puntos admisibles para las estimaciones de Strichartz si ahora $d = 1$.

Para estimar el operador $\mathscr{T}$, nuestra herramienta fundamental serán las llamadas *estimaciones de Strichartz*, que son una forma compacta y muy útil de representar las estimaciones de dispersión de la sección precedente.

THEOREM (STRICHARTZ)

Existe una constante $C > 0$ tal que, para todo $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$, y para todo par de puntos admisibles (q, r), uno tiene

$$\|S(t)u_0\|_{L^q_{\mathbb{R}} L^r_x} \leq C\|u_0\|_{L^2_x}, \qquad S(t) = e^{it\Delta},$$

para (q', r') los conjugados de Hölder,

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} S(-t)F(t)dt \right\|_{L^2_x} \leq C\|F\|_{L^{q'}_t L^{r'}_x},$$

y para un intervalo $I = [0, T] \ni t$,

$$\left\| \int_0^t S(t-s)f(u(s))ds \right\|_{L^q_I L^r_x} \leq C\|f(u)\|_{L^{q'}_I L^{r'}_x},$$

donde $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ y también $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$.

Vamos a demostrar estas estimaciones sólo en el caso *non-endpoint*, es decir $q \neq 2$. El caso límite $q = 2$ requiere nuevas ideas, ver [Keel-Tao] por ejemplo. De manera informal, $q = 2$ es equivalente a $r = 2^*$.

Demostración de las desigualdades de Strichartz, parte I

Queremos probar la primera estimación:

$$\|S(t)u_0\|_{L^q_{\mathbb{R}} L^r_x} \leq C\|u_0\|_{L^2_x}, \qquad S(t) = e^{it\Delta}.$$

Para ello, notemos que, gracias a la caracterización de las normas vía dualidad, esta estimación es equivalente a demostrar que para toda $\varphi \in L^{q'}_{\mathbb{R}} L^{r'}_x$,

$$\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} \int S(t)u_0(x)\overline{\varphi(t,x)}dxdt \leq C\|u_0\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^{q'}_{\mathbb{R}} L^{r'}_x},$$

(note que el dual de $L^q_{\mathbb{R}} L^r_x$ es simplemente $L^{q'}_{\mathbb{R}} L^{r'}_x$).

Primero que todo, uno tiene

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\int S(t)u_0(x)\overline{\varphi(t,x)}dxdt &= \mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\overline{S(t)u_0(x)}\varphi(t,x)dtdx\\
&= \mathrm{Re}\int\overline{u_0(x)}\Big(\int_{\mathbb{R}}S(-t)\varphi(t,x)dt\Big)dx\\
&\leq \|u_0\|_{L^2}\left\|\int_{\mathbb{R}}S(-t)\varphi(t)dt\right\|_{L^2_x}.
\end{aligned}
$$

Notemos que si la segunda desigualdad de Strichartz fuese cierta, esto es,

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} S(-t)\varphi(t)dt \right\|_{L^2_x} \leq C\|\varphi\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}},$$

entonces terminaríamos la demostración de la primera y segunda desigualdad de Strichartz.

Probemos entonces la segunda desigualdad:

$$
\begin{aligned}
&\left\| \int_{\mathbb{R}} S(-t)\varphi(t)dt \right\|_{L^2_x}^2 = \\
&= \int \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} S(-t)\varphi(t,x) S(t') \overline{\varphi(t',x)} dt dt' \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int S(t'-t)\varphi(t,x) \overline{\varphi(t',x)} dx \right) dt dt' \quad (S(t)S(-t') = S(t-t')) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left\| S(t'-t)\varphi(t) \right\|_{L^r_x} dt \right) \| \varphi(t') \|_{L^{r'}_x} dt' \quad (\text{Hölder en } x) \\
&\leq \|\varphi\|_{L^{q'}_{\mathbb{R}} L^{r'}_x} \left\| \int_{\mathbb{R}} S(\cdot - t)\varphi(t) dt \right\|_{L^q_{\mathbb{R}} L^r_x} \qquad (\text{Hölder en } t').
\end{aligned}
$$

En el próximo video estimaremos la cantidad en rojo!

Próximo video: Estimaciones de Strichartz II.