Video 8 Ecuaciones Dispersivas – Estimaciones de Strichartz II

Claudio Muñoz

CNRS y Universidad de Chile

April 15, 2020

Estimaciones de Strichartz

La idea principal es darles una noción de cómo construir una solución para NLS no lineal, al menos durante un período pequeño de tiempo.

Para

$$\begin{aligned} &i\partial_t u + \Delta u = f, \qquad f(t,x) = f(u(t,x)) = \mp |u(t,x)|^2 u(t,x), \\ &u(t=0,x) = u_0(x), \end{aligned}$$

deseamos aplicar la misma estrategia del caso lineal.

Formulación de Duhamel de NLS: si

$$\mathscr{T}[u](t) := S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(u(s))ds,$$

con

$$f(u(s)) = |u(s)|^2 u(s), \qquad S(t) := e^{it\Delta},$$

entonces para encontrar una solución de NLS basta encontrar un punto fijo de $\mathscr{T}$ en un espacio funcional conveniente:

$$u(t) = \mathscr{T}[u](t).$$

Por otro lado, diremos que el par (q,r), con $2 \leq q \leq +\infty$, $2 \leq r < 2^*$ si $d \geq 2$, o bien $2 \leq r \leq 2^*$ si $d = 1$, es **admisible** si

$$\frac{2}{q} = d\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\Big).$$

Por ejemplo, en dimensión $d = 3$, los pares $(8, \frac{12}{5})$, $(\infty, 2)$ y $(\frac{4}{3}, \infty)$ son admisibles. En lo que sigue, trabajaremos con el punto $(8,4)$ en $d = 1$.

THEOREM (STRICHARTZ)

Existe una constante $C > 0$ tal que, para todo $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$, y para todo par de puntos admisibles (q, r), uno tiene

$$\|S(t)u_0\|_{L^q_{\mathbb{R}} L^r_x} \leq C\|u_0\|_{L^2_x}, \qquad S(t) = e^{it\Delta},$$

para (q', r') los conjugados de Hölder,

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} S(-t)F(t)dt \right\|_{L^2_x} \leq C\|F\|_{L^{q'}_t L^{r'}_x},$$

y para un intervalo $I = [0, T] \ni t$,

$$\left\| \int_0^t S(t-s)f(u(s))ds \right\|_{L^q_I L^r_x} \leq C\|f(u)\|_{L^{q'}_I L^{r'}_x},$$

donde $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ y también $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$.

Demostración de las desigualdades de Strichartz, parte I

Queremos probar

$$\|S(t)u_0\|_{L^q_{\mathbb{R}}L^r_x} \leq C\|u_0\|_{L^2_x}, \qquad S(t) = e^{it\Delta}.$$

Para ello, notemos que, gracias a la caracterización de las normas vía dualidad, esta estimación es equivalente a demostrar que para toda $\varphi \in L^{q'}_{\mathbb{R}}L^{r'}_x$,

$$\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\int S(t)u_0(x)\overline{\varphi(t,x)}dxdt \leq C\|u_0\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^{q'}_{\mathbb{R}}L^{r'}_x},$$

(note que el dual de $L^q_{\mathbb{R}}L^r_x$ es simplemente $L^{q'}_{\mathbb{R}}L^{r'}_x$).

Primero que todo, probamos

$$\operatorname{Re}\int_{\mathbb{R}}\int S(t)u_0(x)\overline{\varphi(t,x)}dxdt \leq \|u_0\|_{L^2}\left\|\int_{\mathbb{R}} S(-t)\varphi(t)dt\right\|_{L^2_x}.$$

Por otro lado, probamos

$$\left\|\int_{\mathbb{R}} S(-t)\varphi(t)dt\right\|^2_{L^2_x} \leq \|\varphi\|_{L^{q'}_{\mathbb{R}}L^{r'}_x}\left\|\int_{\mathbb{R}} S(\cdot - t)\varphi(t)dt\right\|_{L^q_{\mathbb{R}}L^r_x}.$$

Probemos la segunda desigualdad. Uno tiene de la desigualdad de Minkowski (Tarea 1),

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} S(t-s)\varphi(s)ds \right\|_{L_I^q L_x^r} \leq \left\| \int_{\mathbb{R}} \|S(t-s)\varphi(s)\|_{L_x^r} ds \right\|_{L_I^q}$$

$$\leq C \left\| \int_{\mathbb{R}} \frac{\|\varphi(s)\|_{L_x^{r'}}}{|t-s|^{d(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})}} ds \right\|_{L_I^q}.$$

Antes de finalizar la demostración, necesitamos

Theorem (Hardy-Littlewood-Sobolev)

Para cada $f \in L_t^n$ uno tiene

$$\left\| |\cdot|^{-\gamma} \star f \right\|_{L_t^m} \leq C \|f\|_{L_t^n},$$

siempre que

$$0 < \gamma < 1, \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{n} - 1 + \gamma.$$

La idea ahora es aplicar este resultado con $m = q$,

$$\gamma = d\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right) \in (0,1),$$

de donde, $2 < r < 2d/(d-2)$ $(d \geq 3)$ o bien $2 < r < +\infty$ si $d = 2$, o bien $2 < r \leq +\infty$ si $d = 1$; es decir, recuperamos la cota por el exponente crícito de Sobolev H^1. Gracias a ser admisible, $\frac{2}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{r}$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{m} + 1 - \gamma = \frac{1}{q} + 1 - \frac{2}{q} = 1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{q'}.$$

En conclusión,

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} \frac{\|\varphi(s)\|_{L_x^{r'}}\, ds}{|t-s|^{d(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})}} \right\|_{L_I^q} \leq C\|\varphi\|_{L_I^{q'} L_x^{r'}}.$$

Observación importante. Para probar la tercera desigualdad de Strichartz, esto es, para un intervalo $I = [0, T] \ni t$,

$$\left\| \int_0^t S(t-s) f(u(s)) ds \right\|_{L_I^q L_x^r} \leq C \| f(u) \|_{L_I^{q'} L_x^{r'}},$$

se necesita un lema no trivial, llamado lema de Christ-Kiselev. El paso de $\int_{\mathbb{R}}$ a $\int_0^t$ es no trivial!

Buen colocamiento en L^2.

Queremos construir una solución (o **flujo**) de NLS en 1D que respete las condiciones impuestas por Hadamard:

1. Que exista y sea única en una clase de funciones continuas en tiempo a valores en un espacio de Banach adecuado,
2. y además exista continuidad **del flujo** con respecto al dato inicial.

Como primer ejemplo, consideremos NLS en dimensión uno, con dato sólo en L^2:

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u \pm |u|^2 u = 0, \quad u = u(t,x) \in \mathbb{C}, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$
$$u(t=0,x) = u_0(x) \in L^2(\mathbb{R}).$$

En dimensión $d=1$ los pares $(8,4)$, $(\infty,2)$ y $(4,\infty)$ son admisibles. En lo que sigue, trabajaremos con el punto $(8,4)$.

Encontraremos una solución de NLS de la forma

$$u(t) = \mathscr{T}[u](t),$$

donde

$$\mathscr{T}[u](t) := S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(u(s))ds, \quad f(u(s)) = \mp|u(s)|^2 u(s).$$

La idea ahora es utilizar el Teorema de Punto fijo de Banach en la bola cerrada

$$B_R := \Big\{ u \in C(I, L^2) \cap L_I^8 L_x^4 \; : \; \|u\|_{L_I^\infty L_x^2} + \|u\|_{L_I^8 L_x^4} \leq R \Big\},$$

donde $I = [0, T]$ y $T > 0$ y $R > 0$ son constantes a elegir a posteriori.

La estimación $L^\infty_I L^2_x$ de $\mathscr{T}[u]$ es estándar, usando la estimación

$$\| \int_{\mathbb{R}} S(t) f(t,\cdot) dt \|_{L^2_x} \leq C \|f\|_{L^{q'}_t L^{r'}_x},$$

que se obtiene por dualidad de Strichartz (Ejercicio.)

Veamos ahora la norma de Strichartz. Notemos que $(8,4)$ es un par admisible. Uno tiene

$$\|\mathscr{T}[u]\|_{L^8_I L^4_x} \leq C(\|u_0\|_{L^2_x} + \||u|^2 u\|_{L^{8/7}_I L^{4/3}_x}).$$

Por otro lado, uno tiene

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \||u(t)|^2 u(t)\|^{8/7}_{L^{4/3}_x} dt = \\
&= \int_0^T \|u(t)\|^{24/7}_{L^4_x} dt \\
&\leq \Big(\int_0^T 1 dt\Big)^{4/7} \Big(\int_0^T \|u(t)\|^8_{L^4_x} dt\Big)^{3/7} \quad \text{(Hölder en tiempo)} \\
&= T^{4/7} \|u\|^{24/7}_{L^8_I L^4_x}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\||u|^2 u\|_{L_I^{8/7} L_x^{4/3}} \leq T^{1/2} \|u\|_{L_I^8 L_x^4}^3,$$

por lo que

$$\begin{aligned} \|\mathscr{T}[u]\|_{L_I^8 L_x^4} &\leq C(\|u_0\|_{L_x^2} + T^{1/2} \|u\|_{L_I^8 L_x^4}^3) \\ &\leq C(\|u_0\|_{L_x^2} + T^{1/2} R^3). \end{aligned}$$

Luego, escogiendo $R > 2C\|u_0\|_{L_x^2}$ grande (*dependiendo de la norma* de u_0), y luego T pequeño tal que $T^{1/2} R^3 < \frac{1}{2C} R$, uno obtiene

$$\|\mathscr{T}[u]\|_{L_I^8 L_x^4} \leq R.$$

Por lo tanto, $\mathscr{T}$ envía B_R hacia B_R.

Probemos ahora que para T pequeño, $\mathscr{T}$ es una contracción. En efecto, para $u, v \in B_R$,

$$\|\mathscr{T}[u]-\mathscr{T}[v]\|_{L^8_I L^4_x} = \left\| \int_0^t S(t-s)(f(u(s))-f(v(s)))ds \right\|_{L^8_I L^4_x},$$

donde $f(u) = -|u|^2 u$. Usando la segunda des. de Strichartz,

$$\|\mathscr{T}[u]-\mathscr{T}[v]\|_{L^8_I L^4_x} \leq C \| |u|^2 u - |v|^2 v \|_{L^{8/7}_I L^{4/3}_x}.$$

No es difícil probar que para $a, b \in \mathbb{C}$,

$$\left| |a|^2 a - |b|^2 b \right| \leq C(|a|^2 + |b|^2)|a-b|.$$

Luego,

$$\|\mathscr{T}[u]-\mathscr{T}[v]\|_{L_I^8 L_x^4} \leq C\|(|u|^2+|v|^2)|u-v|\|_{L_I^{8/7} L_x^{4/3}}.$$

Como en la estimación precedente, usando Hölder,

$$\|(|u|^2+|v|^2)|u-v|\|_{L_x^{4/3}} \leq (\|u\|_{L_x^4}^2+\|v\|_{L_x^4}^2)\|u-v\|_{L_x^4},$$

de donde

$$\begin{aligned}
\|\mathscr{T}[u]-\mathscr{T}[v]\|_{L_I^8 L_x^4} &\leq C\left\|(\|u\|_{L_x^4}^2+\|v\|_{L_x^4}^2)\|u-v\|_{L_x^4}\right\|_{L_I^{8/7}} \\
&\leq CT^{1/2}(\|u\|_{L_I^8 L_x^4}^2+\|v\|_{L_I^8 L_x^4}^2)\|u-v\|_{L_I^8 L_x^4} \\
&\leq CT^{1/2}R^2\|u-v\|_{L_I^8 L_x^4}.
\end{aligned}$$

Luego, para T pequeño, $\mathscr{T}$ es una contracción en B_R.

Concluimos pues, gracias al Teorema del Punto Fijo de Banach, que dado cualquier dato inicial $u_0 \in L^2$, la ecuación no-lineal NLS posee una solución $u(t)$, definida por un instante de tiempo $T > 0$ pequeño, de la formulación de Duhamel.

Sin embargo, entender esta solución para tiempos largos es un problema no trivial.

Próximo video: Buen Colocamiento H^1.