Video 9 Ecuaciones Dispersivas: Buen colocamiento H^1

Claudio Muñoz

CNRS y Universidad de Chile

April 19, 2020

Un problema en $\mathbb{R}^3$:

Queremos encontrar una solución local (buen colocamiento local) para NLS cúbica

$$
\begin{aligned}
& i\partial_t u + \Delta u = f, \qquad f(t,x) = f(u(t,x)) = \mp |u(t,x)|^2 u(t,x), \\
& u(t=0,x) = u_0(x),
\end{aligned}
$$

donde ahora $x \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$. Signo $+$ defocalizante, signo $-$ focalizante.

Formulación de Duhamel de NLS: si

$$\mathscr{T}[u](t) := S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(u(s))ds,$$

con

$$f(u(s)) = |u(s)|^2 u(s), \qquad S(t) := e^{it\Delta},$$

entonces para encontrar una solución de NLS basta encontrar un punto fijo de $\mathscr{T}$ en un espacio funcional conveniente:

$$u(t) = \mathscr{T}[u](t).$$

El problema ahora es dónde colocar $\mathscr{T}$, funcionalmente hablando.

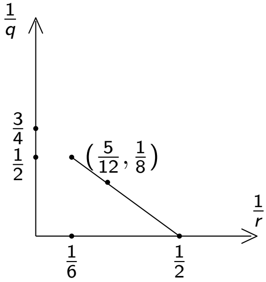
Recordemos admisibilidad: diremos que el par (q, r), con $2 \leq q \leq +\infty$, $2 \leq r < 2^*$ si $d \geq 2$, o bien $2 \leq r \leq 2^*$ si $d = 1$, es **admisible** si

$$\frac{2}{q} = d\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\Big).$$

Por ejemplo, en dimensión $d = 3$, los pares $(q, r) = (8, \frac{12}{5})$, $(\infty, 2)$ y $(\frac{4}{3}, \infty)$ son admisibles:

$$\frac{2}{q} = 3\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\Big).$$

Ahora $2^* = 2d/(d-2) = 6$, por lo que $r < 6$ $(q > 2)$. Los duales de $(q, r) = (8, \frac{12}{5})$ son $(q', r') = (\frac{8}{7}, \frac{12}{7})$.



Sea $I = [0, T]$. La idea es utilizar el Teorema de Punto fijo de Banach en la bola cerrada

$$B_R := \left\{ u \in C(I, H^1) \cap L_I^8 W_x^{1,\frac{12}{5}} \ : \ \|u\|_{L_T^\infty H_x^1} + \|u\|_{L_T^8 W_x^{1,\frac{12}{5}}} \leq R \right\},$$

donde $T > 0$ y $R > 2\|u_0\|_{H_x^1}$ son constantes a elegir a posteriori.

Recordemos que $W^{k,p}$ es el espacio de Sobolev

$$\{u \in S'(\mathbb{R}^d) \ : \ \partial_x^\alpha u \in L_x^p, \quad |\alpha| \leq k\}.$$

Theorem (Strichartz)

Existe una constante $C > 0$ tal que, para todo $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$, y para todo par de puntos admisibles (q, r), uno tiene

$$\|S(t)u_0\|_{L^q_{\mathbb{R}} L^r_x} \leq C\|u_0\|_{L^2_x}, \qquad S(t) = e^{it\Delta},$$

para (q', r') los conjugados de Hölder,

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} S(-t)F(t)dt \right\|_{L^2_x} \leq C\|F\|_{L^{q'}_t L^{r'}_x},$$

y para un intervalo $I = [0, T] \ni t$,

$$\left\| \int_0^t S(t-s)f(u(s))ds \right\|_{L^q_I L^r_x} \leq C\|f(u)\|_{L^{q'}_I L^{r'}_x},$$

donde $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ y también $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$.

Estimaciones de Punto Fijo:

Lo más simple es hacer la estimación de energía. Vamos a usar

$$\|\int_{\mathbb{R}} S(-t)f(t,\cdot)dt\|_{L^2_x} \leq C\|f\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}},$$

con (q,r) admisibles.

Esta es esencialmente la estimación dual a

$$\|S(t)u_0\|_{L^q_{\mathbb{R}} L^r_x} \leq C\|u_0\|_{L^2_x}, \qquad S(t) = e^{it\Delta}.$$

Tenemos

$$
\begin{aligned}
\|\mathscr{T}[u](t)\|_{L^2_x} &\leq \|S(t)u_0\|_{L^2_x} + \left\| \int_0^t S(t-s) f(u(s))ds \right\|_{L^2_x} \\
&\lesssim \|u_0\|_{L^2_x} + \left\| \int_0^t S(t-s) f(u(s))ds \right\|_{L^2_x} \\
&\lesssim \|u_0\|_{L^2_x} + \left\| \int_0^t S(-s) f(u(s))ds \right\|_{L^2_x} \\
&\lesssim \|u_0\|_{L^2_x} + T \sup_{s\in[0,T]} \||u|^3(s)\|_{L^2_x} \\
&\lesssim \|u_0\|_{L^2_x} + CT \sup_{s\in[0,T]} \|u(s)\|^3_{L^6} \\
&\leq \frac{1}{2}R + CT\|u\|^3_{L^\infty_t H^1_x} \leq \frac{1}{2}R + CTR^3 < \ R,
\end{aligned}
$$

para $T > 0$ pequeño, o bien R pequeño y T fijo. (Notar que entre la cuarta y quinta línea arriba hemos usado la injección continua de Sobolev $H^1 \to L^6$ válida en $\mathbb{R}^3$.)

La estimación restante de $\|\nabla \mathscr{T}[u](t)\|_{L^2_x}$ queda de ejercicio.

Por otro lado, notemos que $(8, \frac{12}{5})$ es un par admisible.

Vamos a estimar el gradiente en la norma $W^{1,\frac{12}{5}}$, que es el caso más difícil (hacer el caso faltante sin gradiente como ejercicio).

Usando $\mathscr{T}$ y Strichartz, uno tiene

$$\|\nabla_x \mathscr{T}[u]\|_{L_I^8 L_x^{\frac{12}{5}}} \lesssim \|\nabla_x u_0\|_{L_x^2} + \|\nabla_x(|u|^2 u)\|_{L_I^{8/7} L_x^{12/7}}.$$

Por otro lado, uno tiene

$$
\begin{aligned}
& \|\nabla_x(|u(t)|^2 u(t))\|_{L_x^{12/7}} \\
\lesssim\; & \||u(t)|^2 |\nabla_x u(t)|\|_{L_x^{12/7}} \\
=\; & \left(\int |u(t,x)|^{24/7} |\nabla_x u(t,x)|^{12/7} dx \right)^{7/12} \\
\leq\; & \left(\int |u(t,x)|^{12} dx \right)^{1/6} \left(\int |\nabla_x u(t,x)|^{12/5} dx \right)^{5/12} \quad \text{(Hölder en espacio)} \\
=\; & \|u(t)\|_{L_x^{12}}^2 \|\nabla_x u(t)\|_{L_x^{12/5}} \\
\lesssim\; & \|u(t)\|_{W_x^{1,12/5}}^2 \|\nabla_x u(t)\|_{L_x^{12/5}} \quad \text{(Usando Sobolev)} \\
\lesssim\; & \|u(t)\|_{W_x^{1,12/5}}^3 .
\end{aligned}
$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \|\nabla_x(|u(t)|^2 u(t))\|_{L_x^{12/7}}^{8/7} dt \\
&\lesssim \int_0^T \|u(t)\|_{W_x^{1,12/5}}^{24/7} dt \\
&\leq \Big(\int_0^T 1 dt\Big)^{4/7} \Big(\int_0^T \|u(t)\|_{W_x^{1,12/5}}^{8} dt\Big)^{3/7} \quad \text{(Hölder en tiempo)} \\
&= T^{4/7} \|u\|_{L_I^8 W_x^{1,12/5}}^{24/7}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|\nabla_x(|u(t)|^2 u(t))\|_{L_I^{8/7} L_x^{12/5}} \leq T^{1/2} \|u\|_{L_I^8 W_x^{1,12/5}}^{3}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\|\nabla_x \mathscr{T}[u]\|_{L^8_I L^{12/5}_x} &\lesssim \|u_0\|_{\dot{H}^1_x} + T^{1/2}\|u\|^3_{L^8_I W^{1,12/5}_x} \\ &\lesssim \|u_0\|_{H^1_x} + T^{1/2}R^3.\end{aligned}$$

Luego, escogiendo $R > 2C\|u_0\|_{L^2_x}$ grande (*dependiendo de la norma* de u_0), y luego T pequeño tal que $T^{1/2}R^3 < \frac{1}{2C}R$, uno obtiene

$$\|\mathscr{T}[u]\|_{L^8_I W^{1,12/5}_x} \leq R.$$

Por lo tanto, $\mathscr{T}$ envía B_R hacia B_R.

Probemos ahora que para T pequeño, $\mathscr{T}$ es una contracción.

En efecto, para $u, v \in B_R$,

$$\|\mathscr{T}[u]-\mathscr{T}[v]\|_{L_I^8 W_x^{1,12/5}} = \left\|\int_0^t S(t-s)(f(u(s))-f(v(s)))ds\right\|_{L_I^8 W_x^{1,12/5}},$$

donde $f(u) = -|u|^2 u$.

Como siempre, estimamos un caso, dejando el otro al lector.

En esta oportunidad estimamos la norma $L^{12/5}$. Usando Strichartz,

$$\|\mathscr{T}[u]-\mathscr{T}[v]\|_{L_I^8 L_x^{12/5}} \lesssim \||u|^2 u - |v|^2 v\|_{L_I^{8/7} L_x^{12/7}}.$$

No es difícil probar que para $a, b \in \mathbb{C}$,

$$\big||a|^2 a - |b|^2 b\big| \lesssim (|a|^2 + |b|^2)|a - b|.$$

Luego,

$$\|\mathscr{T}[u] - \mathscr{T}[v]\|_{L_I^8 L_x^{12/5}} \lesssim \|(|u|^2 + |v|^2)|u - v|\|_{L_I^{8/7} L_x^{12/7}}.$$

Como en la estimación precedente, usando Hölder,

$$\|(|u|^2 + |v|^2)|u - v|\|_{L_x^{12/7}} \lesssim (\|u\|_{L_x^{12}}^2 + \|v\|_{L_x^{12}}^2)\|u - v\|_{L^{12/5}},$$

de donde

$$\begin{aligned}
\|\mathscr{T}[u] - \mathscr{T}[v]\|_{L_I^8 L_x^{12/7}} &\leq C \left\| (\|u\|_{L_x^{12}}^2 + \|v\|_{L_x^{12}}^2)\|u - v\|_{L_x^{12/7}} \right\|_{L_I^{8/7}} \\
&\leq C T^{1/2} (\|u\|_{L_I^8 L_x^{12}}^2 + \|v\|_{L_I^8 L_x^{12}}^2)\|u - v\|_{L_I^8 L_x^{12}} \\
&\leq C T^{1/2} R^2 \|u - v\|_{L_I^8 W_x^{1,12/5}}.
\end{aligned}$$

Luego, para T pequeño, $\mathscr{T}$ es una contracción en B_R.

Concluimos pues, gracias al Teorema del Punto Fijo de Banach, que dado cualquier dato inicial $u_0 \in H^1$, la ecuación no-lineal NLS en $\mathbb{R}^3$ posee una solución $u(t)$, definida por un instante de tiempo $T > 0$ pequeño, de la formulación de Duhamel.

Sin embargo, entender esta solución para tiempos largos es un problema no trivial.