Video 10 Ecuaciones Dispersivas: Existencia global, criticalidad

Claudio Muñoz

CNRS y Universidad de Chile

April 21, 2020

NLS en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^3$: En las clases anteriores resolvimos, de manera local en tiempo, y vía punto fijo NLS cúbica

$$i\partial_t u + \Delta u = f, \qquad f(t,x) = f(u(t,x)) = \mp |u(t,x)|^2 u(t,x),$$
$$u(t=0,x) = u_0(x),$$

donde $x \in \mathbb{R}^d$, $d = 1, 3$, y $t \in \mathbb{R}$. La manera de resolverla era viendo la **Formulación de Duhamel de NLS**.

Recordar que signo $+$ defocalizante, signo $-$ focalizante !

Esta noción de resolución se llama *buen colocamiento local*, pues depende del intervalo de tiempo donde está definida la solución.

Recuerdo: En general, diremos que NLS está **localmente bien puesta** en H^s si, dado un dato inicial $u_0 \in H^s$, es posible encontrar un instante de tiempo $T = T(\|u_0\|_{H^s})$, y construir una única solución $u = u(t)$ de la formulación integral de la ecuación ($u = \mathscr{T}[u]$), y donde $u \in C([-T, T], H^s)$.

Si es posible además construir tal solución para $T > 0$ arbitrario y u_0 de tamaño arbitrario, diremos que la ecuación está **globalmente bien puesta**.

Para entender el problema de existencia global, antes necesitaremos entender una noción simple de criticalidad.

La ecuación NLS posee ciertas cantidades formalmente conservadas, es decir, que no varían a través del tiempo.

A manera de ejemplo, al igual que en el caso lineal, la **masa** o norma L^2 (o carga)

$$\int |u(t,x)|^2 dx$$

se conserva durante todo el flujo en tiempo de la ecuación.

Una segunda es la **energía**

$$\frac{1}{2}\int |\nabla u(t,x)|^2 dx \mp \frac{1}{4}\int |u(t,x)|^4 dx.$$

(Probar estos resultados como ejercicio, suponiendo que la solución es suficientemente suave y decae rápidamente.)

Uno puede también preguntarse si es posible definir una solución para NLS en $\mathbb{R}^3$ si el dato inicial está sólo en L^2.

La respuesta este problema es negativa, pero requiere de técnicas más avanzadas, pues NLS en dimensión tres corresponde a una ecuación **supercrítica** en términos de datos L^2.

En términos muy intuitivos (y poco rigurosos, pero muy útiles), criticalidad quiere decir lo siguiente: si $u(t,x)$ es solución de NLS 3D, entonces para cualquier $\lambda > 0$

$$\lambda u(\lambda^2 t, \lambda x)$$

también es solución de la ecuación, con dato inicial $\lambda u_0(\lambda x)$.

Para este dato, se cumple que la norma $\dot{H}^{1/2}$ se preserva:

$$\|\lambda u_0(\lambda x)\|_{\dot{H}^{1/2}} = \|u_0\|_{\dot{H}^{1/2}},$$

por lo que diremos que la ecuación NLS 3D es $H^{1/2}$ crítica.

Otro ejemplo famoso de ecuación $H^{1/2}$ crítica es Navier-Stokes.

Por otro lado, cualquier norma $\dot{H}^s$, $s > \frac{1}{2}$ será tal que la ecuación será **subcrítica** para datos iniciales en ese espacio, y cualquier norma por debajo de $s = \frac{1}{2}$ será para NLS 3D supercrítica, gracias a la identidad siguiente:

$$\|\lambda u_0(\lambda x)\|_{\dot{H}^s} = \lambda^{s-\frac{1}{2}} \|u_0\|_{\dot{H}^s}.$$

Dicho de otra forma, tomar datos sólo en L^2 probablemente lleve a un problema mal puesto, pero inclusive tomando datos en $H^{1/2-\varepsilon}$ la respuesta es la misma: la ecuación se comporta de manera muy negativa.

Por otro lado, si tomamos datos en el espacio subcrítico H^1 (como más arriba lo hicimos), la energía está bien definida, por lo que se dice también que la ecuación es **energía subcrítica**.

Por otro lado, tomar datos sólo en L^2, donde está definida la masa solamente, equivale a decir que la ecuación es **masa supercrítica**.

Por lo tanto, NLS 3D es "masa supercrítica", y "energía subcrítica", pero NLD 1D es masa y energía subcrítica (verificar!!).

Soluciones globales

¿Es posible decidir si la solución local construida vía el método de punto fijo es también global en tiempo?

Este problema puede llegar a ser muy complicado, pero en nuestro caso será razonablemente simple de probar. Por simplicidad, consideremos el caso $d = 1$.

Sabemos desde ya que la ecuación de Schrödinger cúbica 1D

$$\begin{aligned} i\partial_t u + \partial_x^2 u &= \pm |u|^2 u, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x, \quad u = u(t,x) \in \mathbb{C}, \\ u(t=0) &= u_0 \in L^2(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

posee una solución $u = u(t)$ de su formulación integral, definida en L^2.

Esta ecuación también posee una masa y una energía conservadas.

En efecto, una propiedad sorprendente de NLS cúbica 1D es el hecho que posee *infinitas cantidades* conservadas, consecuencias de una propiedad más fundamental denominada *integrabilidad completa* de la ecuación.

Dos observaciones adicionales pueden hacerse:

1. Un análisis simple revela que también existe una solución única para cierto tiempo $T > 0$ y datos $u_0 \in H^1$ (basta rehacer la demostración de la lección anterior sin usar Strichartz, sólo la inyección de Sobolev $H^1 \to L^\infty$).
2. El mismo resultado (de existencia de una solución única para datos H^1) puede obtenerse si se cambia el exponente $p = 3$ en

$$\begin{aligned} i\partial_t u + \partial_x^2 u &= \pm |u|^{p-1} u, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x, \quad u = u(t,x) \in \mathbb{C}, \\ u(t=0) &= u_0 \in H^1(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

por cualquier $1 < p < 5$.

El caso $p = 5$ es más bien crítico, pues las estimaciones de Strichartz hechas anteriormente ya no son necesariamente válidas.

Notemos ahora que las leyes de conservación de NLS cúbica 1D

$$\int |u|^2(t,x)dx, \quad \frac{1}{2}\int |u_x|^2(t,x)dx \pm \frac{1}{4}\int |u|^4(t,x)dx$$

controlan la dinámica en tiempos grandes.

Esto quiere decir que tanto la norma L^2 de la solución permanece constante, y además una combinación de la norma $\dot{H}^1$ y la norma L^4 permanece constante.

Es aquí donde la diferencia entre focalizante y defocalizante es notoria.

En el caso defocalizante, la energía

$$\frac{1}{2}\int |u_x|^2(t,x)dx + \frac{1}{4}\int |u|^4(t,x)dx$$

es siempre no negativa y acotada, por lo que es fácil notar que $\int |u_x|^2$ permanece acotada para cualquier instante de tiempo.

Por lo mismo, concluimos que la ecuación está **globalmente bien puesta**.

En el caso focalizante, parte de lo anterior ya no se cumple: la energía viene dada por

$$\frac{1}{2}\int |u_x|^2(t,x)dx - \frac{1}{4}\int |u|^4(t,x)dx$$

Tenemos una energía conservada, pero ambos términos poseen signos contrarios, por lo que podría darse el caso que ambos términos diverjan a infinito en tiempo finito, con la energía siempre conservada.

Luego, lo único que podemos concluir de la conservación es que en realidad

$$\int |u_x|^2(t,x)dx \leq C\int |u|^4(t,x)dx.$$

Es aquí donde una propiedad muy importante aparece: para $p < 5$, es posible probar la **desigualdad de Gagliardo-Nirenberg**, que dice que

$$\int |f|^{p+1} \leq C_p \Big(\int |f_x|^2 \Big)^{\frac{p-1}{4}} \Big(\int |f|^2 \Big)^{\frac{p+3}{4}},$$

para cualquier $f \in H^1$, y donde la constante C_p tiene un valor específico conocido.

Luego, si $p = 3$, podemos controlar la parte faltante de la norma H^1 usando sólo cantidades conservadas: tenemos

$$\int |u|^4 \leq C_3 \Big(\int |u_x|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int |u|^2 \Big)^{\frac{3}{2}} \leq \tilde{C}_3 \Big(\int |u_x|^2 \Big)^{\frac{1}{2}},$$

de donde

$$\begin{aligned} Cte &= \frac{1}{2} \int |u_x|^2(t,x)dx - \frac{1}{4} \int |u|^4(t,x)dx \\ &\geq \frac{1}{2} \int |u_x|^2(t,x)dx - C \Big(\int |u_x|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Por lo mismo, es posible deducir que cualquier solución de NLS 1D obtenida **con datos** H^1 debe ser global en tiempo.