Video 12 Ecuaciones Dispersivas: Restricción

Claudio Muñoz

CNRS y Universidad de Chile

April 27, 2020

Vamos a hacer una pequeña disgresión para estudiar de manera somera el problema que originó las estimaciones de Strichartz en los '80.

Este problema se conoce como el **de restricción**, y su problema dual el **de extensión**.

A día de hoy, aún hay problemas abiertos relativos a estos tópicos, pero son complicadísimos.

Para efectos de este video, trabajaremos en $\mathbb{R}^{d+1}$ en lugar de $\mathbb{R}^d$.

Recuerdo. La transformada de Fourier en $\mathbb{R}^{d+1}$ de $f \in L^1_x$ estaba dada por

$$\mathscr{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = c_d \int e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx.$$

Además, se cumplía que

$$\mathscr{F} : L^1(\mathbb{R}^{d+1}) \to C_0^0(\mathbb{R}^d),$$

es decir, la transformada de una función L^1 converge a cero en infinito y además es continua en todo punto.

Por lo mismo, la restricción de $\hat{f}$ a una hipersuperficie S en $\mathbb{R}^{d+1}$ (por ejemplo, de dimensión d), está bien definida:

$$\hat{f}\Big|_S \text{ hace sentido.}$$

Además se tiene,

$$\|\hat{f}\Big|_S\|_{L^\infty(S)} \leq c_d \|f\|_{L^1_x}.$$

Por otro lado, si f está solamente en L^2, Plancharel nos dice que $\hat{f} \in L^2$, pero nada adicional.

Por lo mismo, $\hat{f}\Big|_S$ puede no tener sentido.

El **problema de restricción** de la Transformada de Fourier es el siguiente:

Dada S hipersuperficie en $\mathbb{R}^{d+1}$ fija con medida de Lebesgue $d\sigma$ (compacta, no compacta, variedad, acotada, no acotada, etc.), y dados p, q, £existe $C > 0$ tal que

$$\|\hat{f}\Big|_S\|_{L^q(S,d\sigma)} \leq C\|f\|_{L^p_x}?$$

Este problema es extremadamente complicado para ciertas geometrías y valores de la dimensión d.

Caso fácil: $p = 1$, $|S| < +\infty$. Entonces $\hat{f} \in L^\infty$ y para $1 \leq q \leq +\infty$,

$$\|\hat{f}\Big|_S\|_{L^q(S,d\sigma)} \leq C\|f\|_{L^1_x}.$$

Teorema de Stein-Tomas. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ hipersuperficie compacta de curvatura gaussiana distinta de cero, de dimensión d (por ejemplo, una esfera).

Entonces, $\forall p \in [1, p^*]$, la tr. de Fourier $\mathscr{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^{d+1}) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^{d+1})$ se extiende de manera continua a $L^p \cap L^1$ y se tiene

$$\exists C > 0 \quad \text{tq} \quad \forall f \in L^p \cap L^1, \quad \|\hat{f}\Big|_S\|_{L^2(S,d\sigma)} \leq C\|f\|_{L^p_x}.$$

Aquí, $p^* := \frac{2(d+2)}{d+4}$. Además, p^* es optimal, en el sentido que si $p > p^*$, la desigualdad es falsa.

Stein-Tomas conjeturaron que se puede reemplazar L^2 por L^1 si $1 \leq p \leq \frac{2(d+1)}{d+2}$, es decir, existe $C > 0$ tal que

$$\|\hat{f}\Big|_S\|_{L^1(S,d\sigma)} \leq C\|f\|_{L^p_x}, \quad \forall f \in L^p \cap L^1.$$

Hasta ahora, este resultado se ha probado sólo para $d+1=2$ y $S=$ esfera.

Por qué la curvatura es importante? Sea

$$f = f(x_1, x_2, \dots, x_{d+1}) := \frac{1}{1+|x_1|}\psi(x_2, \dots, x_{d+1}),$$

con $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Notemos que $f \in L^p$ si $p > 1$, pero $f \notin L^1$.

Sea $S := \{\xi \in \mathbb{R}^{d+1} \ : \ \xi_1 = 0\}$ un semi-plano (en particular, de curvatura cero). Entonces $\hat{f}\Big|_S$ explota:

$$\begin{aligned} \hat{f}\Big|_S &= \hat{f}(0, \xi_2, \dots, \xi_{d+1}) \\ &= \int_x e^{-i(0x_1+\xi_2 x_2+\dots+\xi_{d+1}x_{d+1})}\frac{\psi(x_2, \dots, x_{d+1})}{1+|x_1|}dx = +\infty. \end{aligned}$$

Relación entre el problema de Restricción y Strichartz.

El dual del problema de restricción es el **problema de Extensión.**

Dada S hipersuperficie de $\mathbb{R}^{d+1}$, sea

$$E_S g(x) := \int_S e^{ix\cdot\xi} g(\xi) d\xi,$$

con $g : S \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^{d+1}$.

Problema. Existe $C > 0$ tal que

$$\|E_S g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^{d+1})} \leq C \|g\|_{L^{q'}(S, d\sigma)}, \quad \forall g \in L^1 \cap L^{q'}?$$

Caso particular: Schrödinger en $\mathbb{R}^d$.

Se tiene, para $u_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned} e^{it\Delta}u_0(x) &= \mathscr{F}^{-1}(e^{-it|\xi|^2}\hat{u}_0(\xi)) \\ &= c_d \int e^{ix\cdot\xi}e^{-it|\xi|^2}\hat{u}_0(\xi)d\xi \\ &= c_d \int_{(\xi,w)\in S} e^{i(x,t)\cdot(\xi,w)}g(\xi,w)d\sigma(\xi,w), \quad g(\xi,w) := \hat{u}_0(\xi). \end{aligned}$$

Aquí, $S = \{(\xi,w) \in \mathbb{R}^{d+1} \ : \ w = -|\xi|^2\}$, es decir, un paraboloide centrado en el origen en $\mathbb{R}^{d+1}$.

Notar que la solución de Schrödinger lineal se puede escribir como un problema de extensión, dual del problema de restricción.

De esta forma, i.e. como problema de extensión, Strichartz probó que $\|e^{it\Delta}u_0\|_{L^{2+4/d}} \leq C\|u_0\|_{L^2}$.

Notar finalmente que $(q,r) = (2+4/d, 2+4/d)$ es admisible, esto es $\frac{2}{q} = d(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})$.

Fueron Ginibre y Velo los que traspasaron estas estimaciones a ecuaciones dispersivas.

Próximo video: Ecuación de Airy, integrales oscilatorias.