

Video 11 Ecuaciones Dispersivas: Simetrías y Solitones

Claudio Muñoz

CNRS y Universidad de Chile

April 28, 2020

Sigamos trabajando con **NLS en $\mathbb{R}^d$** , con la salvedad de que, dependiendo de las dimensiones y la potencia de la no linealidad, tendremos diferentes resultados en términos de existencia local/global, buen/mal colocamiento, etc.

Tomemos entonces, para $p > 1$ y $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} i\partial_t u + \Delta u &= f, & f(t, x) &= f(u(t, x)) = \mp |u(t, x)|^{p-1} u(t, x), \\ u(t=0, x) &= u_0(x), \end{aligned}$$

Recordar que signo $+$ defocalizante, signo $-$ focalizante !

La ecuación NLS posee ciertas cantidades informalmente conservadas, es decir, que no varían a través del tiempo.

A manera de ejemplo, al igual que en el caso lineal, la **masa** o norma L^2 (o carga)

$$\int |u(t, x)|^2 dx$$

se conserva durante todo el flujo en tiempo de la ecuación.

Una segunda es la **energía**

$$\frac{1}{2} \int |\nabla u(t, x)|^2 dx \mp \frac{1}{p+1} \int |u(t, x)|^{p+1} dx.$$

Escalamiento y criticalidad: Si $u(t, x)$ es solución de NLS, entonces para cualquier $\lambda > 0$

$$\lambda^{2/(p-1)} u(\lambda^2 t, \lambda x)$$

también es solución de la ecuación, con dato inicial $\lambda^{2/(p-1)} u_0(\lambda x)$.

El espacio H^{s_c} crítico es el que satisface $s_c := \frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}$.

Ejemplo: Si $0 < s_c < 1$, energía subcrítica y masa supercrítica, si $s_c > 1$, energía y masa supercrítica.

Existencia global versus explosión en tiempo finito

En auxiliar se vió el fenómeno de no existencia global vía una identidad de virial: una cantidad en principio siempre no-negativa, y que mide la concentración de la solución, se vuelve nula en un instante finito. En efecto, si definimos

$$V(t) := \frac{1}{2} \int |x|^2 |u|^2(t, x) dx,$$

tenemos que V es una cantidad siempre nonegativa.

Se prueba entonces que

$$V''(t) \leq 8E(u_0) < 0,$$

esto es, V es estrictamente cóncava, lo que implica que debe anularse y ser negativa en algún momento, algo que es imposible vista la definición de $V(t)$.

Por lo tanto, la solución debe dejar de existir para cierto tiempo.

Simetrías en NLS.

NLS posee muchas simetrías, o invariancias entre soluciones. En efecto, si $u = u(t, x)$ es solución de NLS, entonces

$$c^{1/(p-1)} u(c(t+t_0), \sqrt{c}(x - v_0 t - x_0)) \exp\left(i\left(\frac{1}{2}x \cdot v_0 + ct - \frac{1}{4}|v_0|^2 t + \gamma_0\right)\right),$$

también es solución, para cualquier

1. $c > 0$ (escalamiento)
2. $v_0 \in \mathbb{R}^d$ (invariancia Galileana y v velocidad)
3. $x_0 \in \mathbb{R}^d$ (shift espacial)
4. $t_0 \in \mathbb{R}$ (shift temporal)
5. $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ (fase).

Cada una de estas invariancias es importante en la dinámica de soluciones de NLS. Las más simples son los solitones.

Solitones en NLS

En adición a los resultados de existencia, NLS focalizante posee **solitones**.

Consideremos, a manera de ejemplo,

$$\begin{aligned} i\partial_t u + \partial_x^2 u &= -|u|^{p-1}u, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x, \quad u = u(t, x) \in \mathbb{C}, \\ u(t=0) &= u_0 \in H^1(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Un **solitón** es una solución de NLS de la forma

$$u(t, x) = Q(x)e^{it}.$$

Luego, Q debe resolver la EDO

$$-Q + Q'' + |Q|^{p-1}Q = 0.$$

Las soluciones a esta EDO son explícitas, reales, y vienen dadas por

$$Q(s) := \left(\frac{p+1}{2 \cosh^2(\frac{p-1}{2}s)} \right)^{1/(p-1)} \sim e^{-|s|}.$$

Notar que Q es par y está en la clase de Schwartz.

Este mismo ejercicio se puede hacer para NLS en cualquier dimensión d , para lo cual se debe cumplir, para $Q = Q(x)$,

$$-Q + \Delta Q + |Q|^{p-1}Q = 0.$$

Las soluciones radiales a este problema son conocidas, aunque no explícitas; todas cumplen decaimiento exponencial (Berestycki-Lions).

Usando simetrías de NLS,

$$u(t, x) = c^{1/(p-1)} Q(\sqrt{c}(x - v_0 t - x_0)) \exp\left(i\left(\frac{1}{2}xv_0 + \gamma_0 + ct - \frac{1}{4}v_0^2 t\right)\right),$$

también es solitón generalizado que tiene escalamiento c y velocidad v ; y donde $c > 0$, $v, \gamma_0, x_0 \in \mathbb{R}$.

En otras palabras, una onda solitaria (o solitón), es una **solución viajando a una velocidad** $v_0 \in \mathbb{R}$.

Enfatizamos que solitones son objetos puramente no lineales, la ecuación lineal asociada (Schrödinger lineal), no posee soluciones que no decaen.

Una relación muy interesante entre solitones y existencia global se produce como sigue: calculando la norma L^2 del solitón (que es conservada), tenemos

$$\|Q_c\|_{L^2(\mathbb{R})} \sim c^{\frac{1}{p-1}-\frac{1}{4}},$$

por lo que $\frac{1}{p-1} - \frac{1}{4} > 0$ si $p = 2, 3, 4$ (es decir, el régimen L^2 -subcrítico), $\frac{1}{p-1} - \frac{1}{4} = 0$ si $p = 5$ (L^2 -crítico), y $\frac{1}{p-1} - \frac{1}{4} < 0$ si $p > 5$ (régimen L^2 -supercrítico).

En otras palabras, en el régimen supercrítico los solitones pequeños (en términos de la norma L^∞) son muy grandes en términos de la norma L^2 . Cuando $p = 5$, todos los solitones tienen el mismo tamaño. Podemos resumir esta propiedad diciendo que

$$\frac{1}{2} \partial_c \int_{\mathbb{R}} Q_c^2 \Big|_{c=1} =: \int_{\mathbb{R}} \Lambda Q Q \quad \begin{cases} > 0, & p = 2, 3, 4, \\ = 0, & p = 5, \\ < 0, & p > 5. \end{cases}$$

Aquí arriba hemos denotado por ΛQ_c la llamada **dirección de escalamiento**, es decir

$$\Lambda Q_c(s) := \partial_c Q_c(s) = \frac{1}{c} \left(\frac{1}{p-1} Q_c(s) + \frac{1}{2} s Q'_c(s) \right), \quad (0.1)$$

y $\Lambda Q := \Lambda Q_c \Big|_{c=1}$. Notar que ΛQ_c es una función par también. Cuando $p = 5$, esta dirección se convierte en un elemento muy importante, por ejemplo para el estudio de explosión en tiempo finito.

Estabilidad de solitones

En esta sección discutiremos el problema de estabilidad de solitones.

Asumamos que $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ satisface

$$\|u_0 - Q_c\|_{H^s} < \alpha,$$

donde $\alpha \ll 1$ y $s \geq 0$.

DEFINITION

Diremos que el solitón Q_c es no linealmente estable en H^s si bajo la hipótesis anterior uno tiene

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|u(t) - Q_c(\cdot - \rho(t))e^{i\gamma(t)}\|_{H^s} \lesssim \alpha,$$

para ciertas $\rho(t), \gamma(t) \in \mathbb{R}$. Si no es el caso, diremos que el solitón es inestable.

Notemos que la constante envuelta en la estimación de estabilidad no depende ni de t ni de α . Los parámetros $\rho(t)$ y $\gamma(t)$ son absolutamente necesarios pues si $v' \sim 0$, con $|v'| = \alpha \ll 1$, uno tiene

$$\|Q - Qe^{ixv'/2}\|_{H^s} \sim \alpha \ll 1,$$

pero las correspondientes soluciones satisfacen

$$\|Q(\cdot)e^{it} - Q(\cdot - v't)e^{ixv'/2 + it - \frac{i}{4}v'^2t}\|_{H^s} \sim 1,$$

cuando $t \rightarrow \infty$. En ese sentido, decimos que tenemos una especie de estabilidad **orbital**. El resultado principal que uno puede probar es el siguiente:

THEOREM (ESTABILIDAD H^1)

Asumamos $p \in (1, 5)$, $c = 1$, $v = 0$ (por simplicidad), and $x_0, \gamma_0 \in \mathbb{R}$.
Entonces existen $\alpha_0 > 0$, $C_0 > 0$ tales que, para todo $\alpha \in (0, \alpha_0)$ y para todo $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ tal que

$$\|u_0 - Q(\cdot - x_0)e^{i\gamma_0}\|_{H^1} < \alpha,$$

uno tiene

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|u(t) - Q(\cdot - \rho(t))e^{i\gamma(t)}\|_{H^1} \leq C_0 \alpha,$$

para ciertas $\rho(t), \gamma(t) \in \mathbb{R}$ que satisfacen las estimaciones

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |\rho'(t)| + |\gamma'(t)| \leq CC_0 \alpha,$$

para cierto $C > 0$.

Para la demostración de este resultado, ver por ejemplo [Cazenave].

Próximo video: Problema de Restricción/Extensión.