

Departamento de Ingeniería Matemática
 MA4801-1 Análisis Funcional
 Profesora: Salome Martínez
 Primavera 2022



Ingeniería Matemática
 FACULTAD DE CIENCIAS
 FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
 UNIVERSIDAD DE CHILE

Ejercicios propuestos

Auxiliares : Martín Berríos, Diego Céspedes, Felipe Espinosa

P1. Sean X, Y espacios de Banach y $T \in K(X, Y)$, pruebe que $Im(T)$ es separable.

Tip: Recuerde que la unión numerable de conjuntos separables es separable

P2. Sea $E = l^p$, con $1 \leq p \leq \infty$, y sea λ_n sucesión acotada, considere $T \in \mathcal{L}(E, E)$, definido como

$$T(x_1, x_2, \dots) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots)$$

Pruebe que :

$$T \text{ es compacto} \iff \lambda_n \rightarrow 0$$

P3. Sea E un espacio de Banach, y $T \in \mathcal{K}(E, E)$, tal que T es idempotente, i.e $T \circ T = T$, pruebe que $Im(T)$ es de dimension finita.

P4. Sea E un espacio de Banach reflexivo, y $T \in \mathcal{L}(E, E)$ Pruebe que

$$T \text{ es compacto} \iff \forall x_n \rightharpoonup x \implies T(x_n) \rightarrow T(x)$$

P5. Un Teorema de Von-Neumann Sea X un espacio de Banach reflexivo, y $T : X \rightarrow X$ un operador lineal tal que $\|T\| \leq 1$, para $n \geq 1$, definimos:

$$S_n := \frac{Id + T + \dots + T^{n-1}}{n}$$

a) Sea (u_n) una sucesión en X tal que $u_n \rightharpoonup u$, pruebe que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una sucesión (v_n) tal que $v_n \in Conv(u_k)_{k \geq n}$, tal que v_n converge a u fuertemente.

b) Muestre que para cada $x \in X$, existe una subsucesión S_{n_k} , tal que $S_{n_k}(x)$ converge débilmente, a un límite y . Además, muestre que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (TS_{n_k} - S_{n_k})(x) = 0$$

Deduzca que el límite débil de $S_{n_k}(x)$ es un punto fijo de T .

Tip: Para la última parte, recuerde que el dual separa puntos i.e

$$\text{Si } \forall f \in X^* \quad f(x) = f(y) \implies x = y$$

c) Muestre que $\forall m \geq 1, \forall x \in X$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n T^m x - S_n(x)) = 0$$

Y deduzca que para cada $x \in X, \forall A \in Conv(Id, T, \dots, T^n, \dots)$, se tiene que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n A x - S_n(x)) = 0$$

d) Muestre que para cada $x \in X, \forall k \geq 1, \exists A_k \in Conv(S_{n_k}, S_{n_{k+1}}, \dots)$ tal que $A_k(x)$ converge fuertemente al y de la parte b).

e) Deduzca que para cada $x \in X, (S_n x)$ converge fuertemente en X .

f) Para cada $x \in X$, definamos $P(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$, pruebe que P es una proyección y determine su imagen.

Recordo: Una proyección es un espacio de Banach, es una función $P : X \rightarrow X$, tal que $ker(P)$ y $Im(P)$ son cerrados, y $P \circ P = P$