Departamento de Ingeniería Matemática
MA4801-1 Análisis Funcional
Profesora: Salome Martínez
Primavera 2022

Auxiliar 14: Varios resultados

Auxiliares : Martín Berríos, Diego Céspedes, Felipe Espinosa

P1. [Formulación Variacional]

a) (Lax-Milgram) para $I = (a, b)$ $p \in [1, +\infty]$ definimos

$$W^{1,p} := \{u \in L^p(I);\ \exists g \in L^p(I)\ \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi\ \forall \varphi \in C_c^\infty(I)\}$$

donde $C_c^\infty(I)$ son las funciones $C^\infty(I)$ de soporte compacto contenido en I y diremos $u' = g$ definimos la norma de este espacio como

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}$$

en lo que sigue, tendremos los espacios

$$H_0^1(I) := \overline{C_c^\infty(I)}^{\|\cdot\|_W},\ H^1(I) = W^{1,2}(I)$$

al cual, se le puede asociar el siguiente producto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_I fg + \int_I f'g'$$

lo anterior es para estudiar las siguientes ecuaciones diferenciales

$$(1) \begin{cases} -u'' + bu = f \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

aquí supondremos que $f \in L^2(I)$ y que $b \in L^\infty(I)$ donde además suponga por comodidad que c.s. $b(t) > \delta > 0$, la idea es que para solucionar el problema, es encontrar el $u \in H_0^1$ que cumpla con

$$\int_I (u'v' + buv)dt = a(u, v) = F(v) = \int_I fv, \qquad \forall v \in H_0^1(I)$$

demuestre que existe un único u que cumple lo anterior, y de su caracterización.

b) (Stampacchia) considerando lo anterior ahora veamos la siguiente ecuación en $I = (0, 1)$

$$(2) \begin{cases} -u'' + u = f \\ u(0) = \alpha, u(1) = \beta \end{cases}$$

con $f \in L^2(I)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, para este ejercicio, primero verifique el siguiente conjunto es cerrado y convexo

$$K = \{v \in H^1; v(0) = \alpha,\ v(1) = \beta\}$$

argumente porque existe un único $u \in K$ que satisface (2) y dé una caracterización de este.

c) **Propuesto** Sea H un espacio de *Hilbert* real, y $\alpha > 0$, tal que:

$$\langle Tu, u\rangle \geq \alpha||u||^2$$

Pruebe que T es biyectivo.

P2. [Sumas de Cesàro]
Definición: Una sucesión, $(a_k)_{k\geq 1}$, se dirá Cesàro convergente, si la sucesión $s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$ converge. El objetivo de esta pregunta es probar que dada una sucesión acotada en un espacio de $Hilbert$, entonces tiene una subsucesión que es Cesàro convergente.

a) Sea (u_n) una sucesión en H espacio de Hilbert, tal que $u_n \rightharpoonup 0$. Construya inductivamente una subsucesion (u_{n_j}), que verifique que $u_{n_1} = u_1$ y que

$$|\langle u_{n_j}, u_{n_k}\rangle| \leq \frac{1}{k} \forall k \geq 2 \text{ y } \forall j = 1, 2, ..., k-1$$

Deduzca que la sucesión σ_p, definida por $\sigma_p = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} u_{n_j}$, converge fuertemente a 0, cuando $p \to \infty$.
Indicación: Estimar $|\sigma_p|^2$

b) Concluya que dada una sucesión acotada en un $Hilbert$, existe una subsucesión, que es Cesàro convergente a algo.

P3. Espacios reflexivos Si X e Y indican espacios de Banach demuestre las siguientes proposiciones

a) Suponga existe $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ biyectivo, demuestre que X es reflexivo si y solo si Y lo es

b) Sean X e Y espacios de Banach reflexivos, demuestre que $X \times Y$ lo es

c) Diremos $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ es débilmente compactos si para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X, existe una subsucesión debil convergente de $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$, demuestre que si X o Y es reflexivo, entonces todos los $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ son débilmente compactos.

d) Pruebe que si X es reflexivo, entonces cada funcional $f \in X^\star$ alcanza su norma

Resumen

Teorema (Stampacchia) a sesquilineal, continua ($|a(x, y)| \leq M\|x\|\|y\|$) y coervica ($\exists\alpha > 0$ tq $a(x, x) \geq \alpha\|x\|^2$). Y sea K convexo cerrado de X. Entonces, para $\varphi \in X^*$, $\exists! u \in K$ tq $Rea(v - u, u) \geq Re\varphi(v - u)$, $\forall v \in K$. Es mas , si a es simétrica y el espacio de $Hilbert$ es real , entonces el máximo esta caracterizado por la siguiente propiedad ,

$$u \in K \text{ y } \frac{1}{2}a(u, u) - \langle\phi, u\rangle = \min_{v\in K} \frac{1}{2}a(v, v) - \langle\phi, v\rangle$$

Teorema (Lax-Milgram)a Si a es una forma sesquilineal, continua y coerciva, entonces $\forall\varphi \in H^*$, $\exists! v \in H$ tal que $\varphi(u) = a(u, v)$, $\forall u \in H$. Es mas , si a es simétrica y el espacio de $Hilbert$ es real , entonces el máximo esta caracterizado por la siguiente propiedad ,

$$u \in H \text{ y } \frac{1}{2}a(u, u) - \langle\phi, u\rangle = \min_{v\in H} \frac{1}{2}a(v, v) - \langle\phi, v\rangle$$