Departamento de Ingeniería Matemática
MA4801-1 Análisis Funcional
Profesora: Salome Martínez
Primavera 2022

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Pauta Auxiliar 13: Espacios de Hilbert

Auxiliares : Martín Berríos, Diego Céspedes, Felipe Espinosa

P1. **(L^p no es Hilbert para $p \neq 2$)** Sea $1 \leq p \leq \infty$; muestre que ni ℓ^p ni $L^p(\mathbb{R}^n)$ son espacios de Hilbert cuando $p \neq 2$. Para esto, pruebe que $||\cdot||_p$ no satisface la ley del paralelogramo.

Solución: Para ℓ^p, consideremos las sucesiones e_n, e_m para $n \neq m$ (recordar que $e_n^i = 1$ si $n = i$ y 0 en otro caso). De esta forma,

$$||e_n + e_m||_p^2 + ||e_n - e_m||_p^2 = 2^{2/p} + 2^{2/p} = 2 \cdot 2^{2/p}$$

Por otro lado,

$$2(||e_n||_p^2 + ||e_m||_p^2) = 2 \cdot (1^{2/p} + 1^{2/p}) = 2^2$$

Estas expresiones son iguales si y sólo si $2^{2/p} = 2$, pero esto fuerza a que $p = 2$.
Para $L^p(\mathbb{R}^n)$, por propiedades de la medida de Lebesgue, existe $A \subsetneq R^n$ con $\lambda(A) > 0$ tal que $A = B \cup C$, donde B, C son disjuntos y cumplen $\lambda(B) = \lambda(C) = \lambda(A)/2$. Notemos que $|\chi_B \pm \chi_C| = \chi_A$ y luego

$$||\chi_B + \chi_C||_p^2 + ||\chi_B - \chi_C||_p^2 = 2\lambda(A)^{2/p}$$

Por otro lado,

$$2(||\chi_B||_p^2 + ||\chi_C||_p^2) = 2((\lambda(A)/2)^{2/p} + (\lambda(A)/2)^{2/p}) = 2^2 \frac{\lambda(A)^{2/p}}{2^{2/p}}$$

Cancelando $\lambda(A) > 0$, tenemos que estas expresiones son iguales si y sólo si $2^{2/p} = 2$, es decir, si $p = 2$.

P2. **(Proyección en la frontera)** Sea H un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ y $K \subseteq H$ un cerrado convexo no vacío. Pruebe que si $x \notin K$, entonces $P_K(x) \in \partial K$.

Solución: Por contradicción supongamos que $y = P_K(x) \notin \partial K$; luego y está en el interior de K y existe $\delta > 0$ tal que $\overline{B(y, \delta)} \subseteq K$. Sea

$$k = y + \delta \frac{x - y}{||x - y||}$$

($||x - y|| > 0$ pues $x \notin K$ y K es cerrado). De esta forma $||k - y|| \leq \delta$ y $k \in K$, pero

$$\langle x - y, k - y \rangle = \left\langle x - y, \delta \frac{x - y}{||x - y||} \right\rangle = \delta ||x - y|| > 0$$

lo que contradice que y es la proyección de x en K.

P3. **(Complemento topológico)** Sea H un espacio de Hilbert y M un s.e.v. cerrado. Demuestre que M tiene complemento topológico en H. *Hint: Considerar la proyección en M.*

Solución: Buscamos $W \subseteq H$ s.e.v. cerrado tal que $M \oplus W = H$. Notemos que todo $h \in H$ se puede escribir como $h = P_M(h) + (h - P_M(h))$. Claramente $P_M(h) \in M$. Además, la proyección de h en M está caracterizada por el hecho de que $\forall m \in M$, $\langle h - P_M(h), m\rangle = 0$; por lo que $h - P_M(h) \in M^\perp$. Así, $H = M + M^\perp$.
Observamos que

$$M^\perp = \{h \in H \colon \langle h, x\rangle \ = 0, \forall x \in M\} = \bigcap_{x\in M} \ker\{h \mapsto \langle h, x\rangle\}$$

es cerrado pues las aplicaciones $h \mapsto \langle h, x\rangle$ son lineales continuas por Cauchy-Schwartz. Además, es claro que $M \cap M^\perp = 0$, con lo que concluimos que $W = M \oplus M^\perp$.

P4. (Extensiones) Sea H un espacio de Hilbert real y $F \subseteq H$ un subespacio vectorial cerrado, sea $T \in F^\star$,

- Pruebe que se puede extender a un funcional continuo definido en H(sin usar Hahn-Banach),

Solución: Sea $l \in F^\star$,como F es un subespacio vectorial cerrado de un Hilbert, también es Hilbert, luego por el teorema de representación de Riesz ,l se puede escribir como $l(a) = \langle r, a\rangle$, con $r \in F$, y $a \in F$ luego una extensión continua de f, puede ser.

$$\bar{f} : H \to \mathbb{R}$$
$$h \to \langle r, h\rangle$$

Que efectivamente es continua, por la desigualdad de Cauchy-Schwartz y es una extensión.

- Pruebe que existe una única extensión que preserva la norma.

Solución: Primero calculemos la norma de la extensión definida en la parte anterior y veamos que, esa extensión efectivamente preservas la norma. En efecto :

$$||T||_{F^\star} = \sup_{f\in F^\star ||f||\leq 1} |T(f)| = \sup_{f\in F^\star ||f||\leq 1} |\langle f, r\rangle| \leq ||r||$$

Ahora para ver que la norma se alcanza, basta evaluar $T(\frac{r}{||r||}) = ||r||$ y se tiene que $||T||_{F^\star} = ||r||$
Ahora si queremos calcular la norma de la extensión construida por Riesz, tendremos que sigue siendo la misma, ya que la cota superior no aumenta, sigue siendo menor o igual a $||r||$, y también se sigue alcanzando , ya que $r \in H$.
Ahora, sea A una extensión que preserve la norma i. e $||A||_{H^\star} = ||r||$, y B la función definida anteriormente, i,e $l(h) = \langle h, r\rangle$ ahora por Riesz, A, también tiene un único representante tal que $A(h) = \langle h, r_2\rangle$, ahora si estudiamos el termino $||r_1 - r_2||$:

$$||r_1 - r_2||^2 = ||r_1||^2 - 2\langle r_1, r_2\rangle + ||r_2||^2$$

El termino $\langle r_1, r_2\rangle = B(r_1)$, pero como $r_1 \in F$ y ambas son extensiones $B(r_1) = A(r_1)$, luego $\langle r_1, r_2\rangle = A(r_1) = \langle r_1, r_1\rangle = ||r_1||^2$, luego haciendo un calculo análogo al inicio, podemos concluir que $||r_2|| = ||B||_{H^\star} = ||r||$,i.e podemos concluir que $r_1 = r_2$, luego las extensiones son en realidad la misma, ya que el teorema de Riesz, nos da unicidad también.

P5. (Formas Sesquilineales) Si H, K son espacios de Hilbert, una función $u \colon H \times K \longrightarrow \mathbb{C}$ es una *forma sesquilineal* si para todo $h, g \in H,\ f, k \in H$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

- $u(\alpha h + \beta g, k) = \alpha u(h,k) + \beta u(g,k)$, y
- $u(h, \alpha k + \beta f) = \bar{\alpha} u(h,k) + \bar{\beta} u(h,f)$

Sea $u\colon H \times K \longrightarrow \mathbb{F}$ una forma sesquilinear tal que $|u(h,k)| \leq M||h||\,||k||$ para todo $h \in H$ y $k \in K$. Demuestre que existen $A \in \mathcal{L}(H,K)$, $B \in \mathcal{L}(K,H)$ únicos tales que

$$u(h,k) = \langle Ah, k\rangle = \langle h, Bk\rangle$$

para todo $h \in H$ y $k \in K$. Más aún $||A||, ||B|| \leq M$.

Una solución: Sólo probaremos la existencia de A pues para B es análogo. Para cada $h \in H$ definamos $L_h\colon K \longrightarrow \mathbb{C}$ por $L_h(k) = \overline{u(h,k)}$. Claramente L_h es lineal y $|L_h(k)| \leq M||h||\,||k||$ por lo que L_h es continua con norma $||L_h|| \leq M||h||$.
Por el Teorema de Representación de Riesz, existe un único $f \in K$ tal que $L_h(k) = \langle k, f\rangle$ para todo $k \in K$. Definimos $A\colon H \longrightarrow K$ por $Ah = f$ (está bien definida por la unicidad del teorema de Riesz).
Veamos que A es lineal. Sean $h, g \in H$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Notemos que para todo $k \in K$

$$\begin{aligned}
\langle k, Ah + \alpha Ag\rangle &= \langle k, Ah\rangle + \bar{\alpha}\langle k, Ag\rangle \\
&= L_h(k) + \bar{\alpha} L_g(k) \\
&= \overline{u(h,k)} + \bar{\alpha}\overline{u(g,k)} \\
&= \overline{u(h+\alpha g, k)} \\
&= L_{h+\alpha g}(k)
\end{aligned}$$

Es decir, $Ah + \alpha Ag \in K$ también es un representante del funcional $L_{h+\alpha g}$. Como el TRR nos dice que tal representante es único, concluimos que $A(h+\alpha g) = Ah + \alpha Ag$ y A es lineal.
Por último, el TRR también nos dice que para todo $h \in H$, $||Ah|| = ||L_h|| \leq M||h||$. Por lo tanto, $||A|| \leq M$.

P6. (Adjuntos) Sea H un espacio de Hilbert, y $T \in \mathcal{L}(H,H)$ un espacio de Hilbert real

- Sea $T \in \mathcal{L}(H,H)$, tal que $||T|| \leq 1$, se definen los puntos invariantes de T como , $Inv(T) = \{h \in H : Th = h$, pruebe que bajo las hipótesis de arriba.

$$Inv(T) = Inv(T^\star)$$

Una solución: $\subseteq$: En este ejercicoi usaremos las propiedades que nos dicen que la norma del adjunto es la misma que la norma del original $||T^\star|| = ||T||$, y que $T^{\star\star} = T$ h tal que $Th = h$, luego queremos ver que $T^\star h = h$, es decir basta ver que $||T^\star h - h||^2$, luego

$$\begin{aligned}
||T^\star h - h||^2 &\leq ||T^\star h||^2 - 2\langle T^\star, h\rangle + ||h||^2 \\
&\leq ||T^\star||||h||^2 - 2\langle h, T^{\star\star} h\rangle + ||h||^2 \\
&\leq ||h||^2 - 2||h||^2 + ||h||^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Para la otra inclusión, sea h, tal que $T^\star h = h$, basta replicar la misma demostración que arriba, para concluir que $T^{\star\star}(h) = h = T(h)$.

- Sea U una isometria de H , un **co-borde** es un elemento de la forma $g - Ug$, con $g \in H$, pruebe que los co-bordes son densos, en el complemento ortogonal de $Inv(U)$

Una solución: Oservacion: Primero recordaremos que una isometría en este contexto, siempre es lineal y cumple que $||Ty|| = ||y||$, puede parecer a primera vista que todas las isometrias son biyecciones, pero no necesariamente lo son, basta considerar en $l^2(\mathbb{N})$, la función :

$$\begin{aligned} l : l^2(\mathbb{N}) &\to l^2(\mathbb{N}) \\ (x_1, x_2, ...) &\to (0, x_1, x_2, ...) \end{aligned}$$

Primero veamos que efectivamente se tiene la inclusión, ya que no parece muy evidente.

$$Cobordes(U) \subseteq Inv(U)^\perp$$

Sea $y \in Cobordes(U)$, i.e $y = g - Ug$, y $h \in Inv(U)$, queremos ver que $\langle y, h\rangle = 0$, en efecto

$$\langle y, h\rangle = \langle g - Ug, h\rangle = \langle g, h\rangle - \langle Ug, h\rangle = \langle g, h\rangle - \langle g, U^\star h\rangle = \langle g, h\rangle - \langle g, h\rangle = 0$$

Donde se uso que $||U|| \leq 1$, para usar que $Inv(U) = Inv(U^\star)$, así que se tiene la inclusión Ahora para probar densidad como no tenemos a mano ninguna información sobre separabilidad de los espacios, debemos recurrir a un corolario de Hahn Banach que sirve para probar densidad, el cual es el siguiente: Corolario (1,8 Brezis): Sea $F \subseteq E$, F subespacio vectorial, entonces F es denso si cada funcional lineal que es 0 en F debe ser 0 en E Para usar esto debemos verificar que $Inv(U)^\perp$ es un espacio de Banach y que los cobordes son un espacio vectorial, en efecto:

- Los cobordes son un espacio vectorial, en efecto sean y_1 y y_2 cobordes i .e $y_1 = g_1 - Ug_1$ y $y_2 = g_2 - Ug_2$, luego $y_1 + y_2 = (g_1 + g_2) - U(g_1 + g_2)$, entonces la suma de cobordes es cobordes, la estabilidad bajo multiplicacion por escalares se verifica de la misma forma.

- $Inv(U)^\perp$ es un espacio de Banach, en efecto el ortogonal de $Inv(U) = Ker(I - U)$ siempre es cerrado, al ser la intersección de kernels asociados al producto interno(Ver P3).
  Una vez verificado esto, basta tomar un funcional lineal definido en $(Inv(U)^\perp)^\star$ y ver que si es 0 en todos los cobordes, entonces es 0 en $Inv(U)^\perp$.

En efecto sea $f \in (Inv(U)^\perp)^\star$, tal que es 0 en los cobordes, primero notemos que como f es un funcional lineal definido en un Hilbert por el TRR, existe un representante $r_1 \in Inv(U)^\perp$ tal que $f(h) = \langle h, r_1\rangle$, ahora si es 0 en los cobordes, se tiene que

$$\langle h, g - Ug\rangle = 0 \text{ para todo } g$$

Es decir $\langle h, g\rangle - \langle U^\star h, g\rangle = \langle h - U^\star h, g\rangle = 0$ para todo $g \in H$, luego como $h - U^\star h$ es ortogonal a todos los vectores, debe ser el 0, así que $h = U^\star h$, es decir $h \in Inv(U)$, pero a su vez $h \in Inv(U)^\perp$, es decir h es ortogonal a si mismo, asi que $h = 0$, luego $f \equiv 0$, verificando que se cumplen las hipótesis del corolario de Hahn-Banach, y por lo tanto se tiene la densidad de los cobordes en el complemento ortogonal de los vectores invariantes de U.

P7. (Operadores Autoadjuntos) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$. Decimos que $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es *autoadjunto* si $A = A^*$, es decir, si $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$.

(a) Demuestre que A es autoadjunto si y sólo si $\langle Ah, h\rangle \in \mathbb{R}$ para todo $h \in \mathcal{H}$.

Solución: Si A es autoadjunto, entonces $\overline{\langle Ah, h\rangle} = \langle h, Ah\rangle = \langle Ah, h\rangle$ y por lo tanto $\langle Ah, h\rangle \in \mathbb{R}$.
Recíprocamente, sean $h, g \in H$ y probemos que $\langle Ah, g\rangle = \langle h, Ag\rangle$. El truco para este tipo de problemas es hacer aparecer estos términos cruzados considerando una expresión del tipo

$\langle A(h+\alpha g), h+\alpha g\rangle$ con $\alpha \in \mathbb{C}$. Notemos que

$$\langle A(h+\alpha g), h+\alpha g\rangle = \langle Ah, h\rangle + |\alpha|^2\langle Ag, g\rangle + \alpha\langle Ag, h\rangle + \bar{\alpha}\langle Ah, g\rangle$$

El lado izquierdo y los primeros dos términos del lado derecho son reales, por lo que forzosamente $\alpha\langle Ag, h\rangle + \bar{\alpha}\langle Ah, g\rangle \in \mathbb{R}$. Luego, esta cantidad es igual a su conjugado:

$$\alpha\langle Ag, h\rangle + \bar{\alpha}\langle Ah, g\rangle = \bar{\alpha}\langle h, Ag\rangle + \alpha\langle g, Ah\rangle$$

Imponiendo $\alpha = 1$ y $\alpha = i$ llegamos las ecuaciones

$$\begin{cases} \langle Ag, h\rangle + \langle Ah, g\rangle = \langle h, Ag\rangle + \langle g, Ah\rangle \\ i\langle Ag, h\rangle - i\langle Ah, g\rangle = -i\langle h, Ag\rangle + i\langle g, Ah\rangle \end{cases}$$

Multiplicando la segunda ecuación por i y luego sumando ambas, obtenemos que $\langle Ah, g\rangle = \langle h, Ag\rangle$.

(b) Pruebe que si $A = A^*$, entonces

$$||A|| = \sup\{|\langle Ah, h\rangle| \colon ||h|| = 1\}$$

Solución: Sea $M = \sup\{|\langle Ah, h\rangle| \colon ||h|| = 1\}$ Si $||h|| = 1$, entonces $|\langle Ah, h\rangle| \leq ||Ah|| \cdot ||h|| \leq ||A||$ y $M \leq ||A||$.
Por otro lado, si $||h|| = ||g|| = 1$, entonces

$$\begin{aligned} \langle A(h \pm g), h \pm g\rangle &= \langle Ah, h\rangle \pm \langle Ah, g\rangle \pm \langle Ag, h\rangle + \langle Ag, Ag\rangle \\ &= \langle Ah, h\rangle \pm \langle Ah, g\rangle \pm \langle A^\star h, g\rangle + \langle Ag, Ag\rangle \end{aligned}$$

Como $A = A^\star$, se tiene :

$$\langle A(h \pm g), h \pm g\rangle = \langle Ah, h\rangle \pm 2Re\langle Ah, g\rangle + \langle Ag, Ag\rangle$$

Ahora, considerando por un lado

$$\langle A(h+g), h+g\rangle = \langle Ah, h\rangle + 2Re\langle h\rangle + \langle Ag, Ag\rangle$$

Y por otro lado:

$$\langle A(h-g), h-g\rangle = \langle Ah, h\rangle - 2Re\langle + \langle Ag, Ag\rangle$$

Podemos restarle a la primera la segunda, para llegar a :

$$4Re\langle Ah, g\rangle = \langle A(h+g), h+g\rangle - \langle A(h-g), h-g\rangle$$

Ahora también, se tiene que:

$$|\langle Af, f\rangle| \leq M||f||^2$$

Ahora, retomando lo anterior:

$$\begin{aligned} 4Re\langle Ah, g\rangle &= \langle A(h+g), h+g\rangle - \langle A(h-g), h-g\rangle \\ &\leq M(||h+g||^2 + ||h-g||^2) \\ &= 2M(||h||^2 + ||g||^2) \text{ } h \text{ y } g \text{ de norma uno} \\ &= 4M \end{aligned}$$

En conclusión $Re\langle Ah, g\rangle \leq M$ Ahora , supongamos que $|\langle Ah, g\rangle| = e^{i\theta}\langle Ah, g\rangle$(descomposición polar de numeros complejos), podemos tomar $h = e^{-i\theta}h$, en la desigualdad anterior y tenemos que

$$||\langle Ah, g\rangle|| \leq M$$

Ahora tomando supremo en g, con $||g|| = 1$, recuperamos, por dualidad la norma de Ah, es decir , se tiene que $||Ah|| \leq M$, para $||h|| = 1$, tomando supremo en h, ahora se recupera la norma de A, llegando a $||A|| \leq M$

P8. **(Operadores Unitarios)** Si H y K son espacios de Hilbert, un *operador unitario* entre H y K es una función lineal $U : H \longrightarrow K$ tal que $\langle Uh, Ug\rangle = \langle h, g\rangle$ para todo $h, g \in H$.

(a) Demuestre que una aplicación lineal $U : H \longrightarrow K$ es unitaria si y sólo si es una isometría.

Solución: Si U es unitaria, entonces para todo $x \in H$ se cumple que $||Ux||^2 = \langle Ux, Ux\rangle = \langle x, x\rangle = ||x||^2$ y es una isometría. Recíprocamente, consideremos $h, g \in H$ y notemos que $||h + g||^2 = ||Uh + Ug||^2$. Expandiendo cada lado llegamos a la expresión

$$||h||^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle h, g\rangle + ||g||^2 = ||Uh||^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle Uh, Ug\rangle + ||Ug||^2$$

Como $||Uh|| = ||h||$ y $||Ug|| = ||g||$, cancelamos estos términos y llegamos a que

$$\mathrm{Re}\langle h, g\rangle = \mathrm{Re}\langle Uh, Ug\rangle$$

Para ver que las partes imaginarias coinciden, reemplazamos ig en g y recordamos que $\mathrm{Re}(-iz) = \mathrm{Im}(z)$.

(b) Sea $T : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ una función lineal que preserva las relaciones de ortogonalidad, i.e., $\langle Tx, Ty\rangle = 0$ cuando $\langle x, y\rangle = 0$. Demuestre que $T = \alpha U$ donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y U es un operador unitario.
Hint: Considere los vectores canónicos $e_1, \ldots, e_n$ y pruebe que $\langle Te_i, Te_i\rangle$ es constante.

Solución: Notemos que $\langle e_i - e_j, e_i + e_j\rangle = ||e_i||^2 - ||e_j||^2 = 0$. Como T preserva la ortogonalidad, $\langle T(e_i - e_j), T(e_i + e_j)\rangle = 0$. Desarrollando el lado izquierdo tenemos que

$$\langle T(e_i - e_j), T(e_i + e_j)\rangle = \langle Te_i, Te_i\rangle + \langle Te_i, Te_j\rangle - \langle Te_j, Te_i\rangle - \langle Te_j, Te_j\rangle = 0$$

Pero $\langle Te_i, Te_j\rangle = \langle Te_j, Te_i\rangle = 0$, pues $\langle e_i, e_j\rangle = \langle e_j, e_i\rangle = 0$. Así, probamos que para todo $i \neq j$, $\langle Te_i, Te_i\rangle = \langle Te_j, Te_j\rangle = k$. Más aún, esta constante k está en $\mathbb{R}$ pues $\langle x, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{C}^n$.
Si $k = 0$, entonces $Te_i = 0$ para todo i y $T = 0$. Si $k \neq 0$ notemos que $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$,

$$\langle Tx, Ty\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} T(x_i e_i), \sum_{j=1}^{n} T(y_j e_j) \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \overline{y_i}\langle Te_i, Te_j\rangle$$

Por lo recién probado, $\langle Te_i, Te_j\rangle = k\delta_{ij}$ (delta de Kronecker), así que esta última sumatoria se reduce a

$$\langle Tx, Ty\rangle = k\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = k\langle x, y\rangle$$

Si definimos $\alpha = \sqrt{k}$, entonces $U := (1/\alpha)T$ es un operador unitario tal que $T = \alpha U$:

$$\langle Ux, Uy\rangle = \frac{1}{\alpha^2}\langle Tx, Ty\rangle = \frac{1}{k}k\langle x, y\rangle = \langle x, y\rangle$$