Departamento de Ingeniería Matemática
MA4801-1 Análisis Funcional
Profesora: Salome Martínez
Primavera 2022

Auxiliar 10: Repaso C2

Auxiliares : Martín Berríos, Diego Céspedes, Felipe Espinosa

P1. El objetivo de esta pregunta es caracterizar la convergencia débil , en un caso 'concreto'.

Marco Teorico

Para resolver esta pregunta, se asumirá el siguiente teorema

Teorema. [Representación de Riesz-Markov-Kakutani]

Sea X un espacio topológico, compacto y Hausdorff, entonces para cualquier funcional lineal continua $\psi \in C(X)^{\star}$, existe una medida única medida con signo , finita , regular interior y exterior, tal que para todo $f \in C(X)$:

$$\psi(f) = \int_X f d\mu$$

a) Sea X un espacio compacto y Hausdorff, $f \in C(X)$, y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C(X)$, luego

$$f_n \rightharpoonup f \iff \sup_{n\in\mathbb{N}} ||f_n||_\infty < \infty, \text{ y } f_n(x) \to f(x) \forall x \in X$$

b) **[Propuesto]** Sea $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$, una funcion continua y $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, con $n \in \mathbb{N}$, definida como $f_n(x) = \phi(x^n)$, usando la parte anterior, pruebe que f_n converge debilmente si y solo si $\phi(0) = \phi(1)$

Una Solución

1) $\implies$, Para ver que $\sup_{n\in\mathbb{N}} ||f_n||_\infty < \infty$, se posible usar un corolario del teorema de la cota uniforme ya que para cada funcional ϕ, en el dual, $\phi(f_n)$ converge, es decir es acotado, luego f_n es débilmente acotada, por lo tanto acotado.
Para ver que $f_n(x) \to f(x) \forall x \in X$, tomemos la delta de Dirac centrada en x y veamos que es continua, entonces definimos .

$$\delta_x : C(X) \to \mathbb{R}$$
$$f \to \delta_x(f) = f(x)$$

Es claro que es lineal, por lo tanto resta ver que es continua, para ello , notemos que $|\delta_x(f)| \leq ||f|_\infty$, es decir es continua, luego como para cada $x \in X$, $delta_x \in C(X)^\star$, luego como f_n converge debil a f, en particular.

$$f_n(x) = \langle \delta_x, f_n \rangle \to \langle \delta_x, f \rangle = f(x)$$

$\impliedby$: Para esta dirección, tomaremos un funcional $\psi \in C(X)^\star$, y veremos que $\langle \psi, f_n \rangle \to \langle \psi, f \rangle$ usaremos el teorema de representación, de Riesz y descompondremos la medida con signo, usando el teorema de descomposición de Jordan ,i.e $\mu = \mu^+ - \mu^-$, donde ambas medidas son positivas, finitas y singulares entre si, luego:

$$\langle \psi, f_n \rangle = \int_X f_n d\mu^+ - \int_X f_n d\mu^-$$

Luego usando el $T.C.D$ en las dos medidas, dominando las funciones por $\sup_{n\in\mathbb{N}} ||f_n||_\infty$, que es integrable pues las medidas μ^+, μ^- son finitas, concluimos que $\langle \psi, f_n \rangle \to \langle \psi g \rangle$

P2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una funcion infinitamente diferenciable, tal que para cada $x \in \mathbb{R}$, $\exists n = n(x)$, tal que $f^{(n)}(x) = 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $F_n = \{x \in \mathbb{R} : f^{(n)}(x) = 0\}$, y sea $I = [a, b]$, un intervalo cerrado finito, entonces:

a) Muestre que $I = \bigcup_{n=0}^{\infty}(I \cap F_n)$

b) Muestre que existe un abierto no vació $A \subset I$, donde que f es un polinomio.

Una Solución

a) Solo es necesario mostrar una inclusión, i.e $I \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty}(I \cap F_n)$, en efecto sea $iinI$, existe por hipotesis de F, un $n(i)$, tal que $f^{n(i)}(i) = 0$, entonces $i \in F_n \cap I$.

b) Como $[a, b]$, es un espacio metrico completo , con la topologia traza, y cada $I \cap F_n$ es un cerrado en la topologia traza(preimagen del $\{0\}$) por Baire, alguno debe tener interior no vacio,, digamos F_{n_0} es decir existen $c < d$ tal que $(c, d) \subset F_{n_0} \cap I$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, luego si trabajamos ahora en el intervalo (c, d), sabemos que es conexo, luego f debe ser un polinomio en este intervalo.

P3. Sea M espacio métrico y E espacio de Banach. Sea $f : M \to E$, pruebe que f es Lipschitz si y solo si $\forall l \in E^\star$, $l \circ f : M \to \mathbb{R}$ es Lipschitz.
Recuerdo: Una función $f : (M, d_M) \to (E, d_E)$, entre espacios métricos, se dirá Lipschitz si

$$\exists C > 0, \forall x, y \in M \quad d_E(f(x), f(y)) \leq C d_M(x, y)$$

Una Solución $\Longrightarrow$: Para ver esta implicancia, sean $x, y \in M$, luego

$$\begin{aligned} |l \circ f(x) - l \circ f(y)| &\leq ||l||_{E^\star} ||f(x) - f(y)||_E \text{ ya que } l \in E^\star \\ &\leq ||l||_{E^\star} C d_M(x,y) \text{ ya que } f \text{ es Lipschitz} \end{aligned}$$

$\Longleftarrow$:
Primero que todo notemos dos cosas , primero para ver que f es Lipschiz, solo hay que preocuparse, de acotar la diferencia $f(x) - f(y)$, cuando $x \neq y$, y segundo, basandonos en lo anterior, notamos que ser Lipschitz es equivalente a lo siguiente(ejercicio):

$$f \text{ es Lipschitz} \iff \exists R > 0, \text{ tal que } \forall x, y \;\; x \neq y, \;\; \frac{f(x) - f(y)}{d_M(x,y)} \subseteq B(0,R) \subseteq E$$

Luego recordamos la útil herramienta, que nos dice que , ser débil-acotado, es equivalente a ser fuerte acotado, por ende tratemos de usar esto, definamosnos el conjunto de arriba y veamos que es debil acotado.

$$A = \{\frac{f(x) - f(y)}{d_M(x,y)}, x, y \in M, x \neq y\} \subseteq E$$

Ahora, para $l \in E^\star$, como $l \circ f$ es Lipschitz, digamos de constante K..

$$l(A) = \{\frac{l \circ f(x) - l \circ f(y)}{d_M(x,y)}, x, y \in M, x \neq y\} \subseteq B(0,K) \subseteq \mathbb{R}$$

Luego A es debilmente acotado, por lo tanto acotado.

P4. Sea $[a,b]$ un intervalo cerrado finito y $X \subseteq C^1[a,b]$, un subespacio cerrado de $C[a,b]$.

a) Pruebe que para $u \in X$, existe una constante $c > 0$, que no depende de u tal que $|u'|_\infty \leq C|u|_\infty$ (Hint: Usar el teorema del grafo cerrado).

b) Pruebe que $dim(X) < \infty$, recuerde el teorema de Arzelá-Ascoli

Equicontinuidad: Sea (X, τ) e.t, e (Y, d) espacio metrico. Un subconjunto $\mathcal{E} \subseteq C(X,Y)$, se dice **equicontinuo**, si para cualquier $x_0 \in X$, existe una vecindad $V \in \mathcal{N}_{x_0}$ tal que para toda $f \in \mathcal{E}$, y para todo $x \in V$, se tien que $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.
Teorema de Arzelá-Ascoli Sea (X, τ) e.t. compacto e (Y, d) un e.m completo. Un conjunto $\mathcal{E} \subseteq C(X,Y)$ es relativamente compacto si y solo si

- $\mathcal{E}$ es equicontinuo
- Para todo $x \in X$, el conjunto $\mathcal{E}(x) = \{f(x) : f \in \mathcal{E}\}$ es relativamente compacto en Y

Una solucion::

a) Como sabemos que la derivada es lineal, para probar la cota, basta demostrar que la derivada es una funcion continua, para demostrar que es continua usaremos el teorema del grafo cerrado, que se puede ocupar, pues ambos X Y $C[a,b]$ son Banach, entonces definimos la derivada:

$$\begin{aligned} D : X &\to C[0,1] \\ u &\to D(u) = u' \end{aligned}$$

Para ver que es continuo, usaremos el teorema del grafo, cerrado , para ello tomaremos

$$u_n \to u \wedge u_n' \to v$$

Y demostraremos que $v = Du = u'$, para ello notemos, primero que $u \in X$ por que X es cerrado, por lo tanto u es de clase C^1, ahora como queremos vincular informacion de u con su derivada, se sugiere usar el T.F.C, entonces

$$u_n(x) = u_n(a) + \int_a^x u_n' dt$$

Luego como tenemos limites uniformes , se puede intercambiar la derivada con el limite, i.e tomando limite a la igualdad de arriba, se tiene

$$u(x) = u(a) + \int_a^x v dt$$

Derivando , la ultima igualdad se concluye

$$u' = v$$

De esto se deduce la desigualdad pedida.

b) Como no tenemos muchas herramientas para probar que algo es de dimension finita, recordamos el teorema que nos dice que si un e.v.t es localmente compacto, entonces tiene dimensio finita, por ello trataremos de ver que la bola de radio 1 en X es relativamente compacta, para ello nos apoyaremos en el teorema de Arzelá-Ascoli. Sea entonces:

$$B = \{x \in X : ||u||_\infty < 1\}$$

El objetivo sera ahora demostrar que la bola es equicontinua y que para cada $x \in [a,b]$, $B(x) = \{f(x) : f \in B\}$ es relativamente compacto en $\mathbb{R}$.

- La bola es equicontinua, en efecto , forzando la desigualda demostrada anteriormente, se tiene para $x, y \in [a,b]$ y $f \in B$

$$|u(x) - u(y)| = |\int_y^x u' dt| \leq C||u||_\infty |x-y| \leq C|x-y|$$

  En particular si $|y - x| < \frac{}{C}$, para toda $f \in B$, se tiene que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, es decir se verifica la equicontinuidad.

- Para ver que cada $B(x)$ es relativamente, basta ver que es compacto, esto se tiene porque en particular :

$$B(x) \subseteq B(0,1)\text{Bola centrada en 0 de radio 1}$$

Luego es relativamente compacto, entonces tiene dimension finita.