

Departamento de Ingeniería Matemática
 MA4801-1 Análisis Funcional
 Profesora: Salome Martínez
 Primavera 2022



Ingeniería Matemática
 FACULTAD DE CIENCIAS
 FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
 UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 7: Dualidad

Auxiliares : Martín Berríos, Diego Céspedes, Felipe Espinosa

P1. [Dualidad en un e.v.n]

Sea E un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$, y sea E^* su espacio dual, con la norma:

$$\|f\|_{E^*} = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} |\langle f, x \rangle|$$

El bidual de E^{**} es el dual de E^* , con la norma

$$\|\xi\|_{E^{**}} = \sup_{f \in E^*, \|f\| \leq 1} |\langle \xi, f \rangle|$$

, Se define la inyección canónica $J : E \rightarrow E^{**}$ de la siguiente forma, dado un $x \in E$, la función $f \rightarrow \langle f, x \rangle$ es un funcional continuo lineal en E^* , es decir un elemento de E^{**} , pruebe las siguientes propiedades.

- Pruebe que J es una isometría, es decir $\|Jx\|_{E^{**}} = \|x\|_E$,
- Ahora sean, X, Y espacios de Banach, y $T : X \rightarrow Y$ una isometría, pruebe que $T(X)$ es un subespacio vectorial cerrado de Y , concluya ahora que cuando E es un espacio de Banach, se puede identificar coherentemente con un subespacio de

Una solución:

- 1) Para ver esto, calculemos la norma $\|Jx\|_{E^{**}} = \sup_{f \in E^*, \|f\| \leq 1} |\langle Jx, f \rangle|$, se tiene por una parte

$$\|Jx\|_{E^{**}} = \sup_{f \in E^*, \|f\| \leq 1} |\langle Jx, f \rangle| = \sup_{f \in E^*, \|f\| \leq 1} |\langle f, x \rangle| \leq \|x\|$$

, ahora para demostrar la igualdad, es suficiente encontrar un $f \in E^*$ con $\|f\| \leq 1$, tal que $|\langle f, x \rangle| \geq \|x\|$, pero por un corolario de Hahn-Banach, sabemos que existe efectivamente un f que cumple estas propiedades.

- 2) Primero demostremos la primera parte, hay que demostrar que $T(X)$ es un espacio vectorial cerrado, es directo que $T(X)$ es un espacio vectorial, por lo que solo falta demostrar que es cerrado, como estamos trabajando con espacios metrizables, se puede caracterizar la cerradura por sucesiones. entonces, hay que demostrar lo siguiente:

$$(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq T(X), \text{ tal que } z_n \rightarrow \bar{z} \text{ Ver que } z \in T(X)$$

Como $z_n \in T(X)$, cada z_n se puede escribir como $z_n = T(x_n)$, ahora si se lograra demostrar que los $x_n \rightarrow x$, la demostración estaría lista, ya que $y_n = T(x_n) \rightarrow T(x)$.

Observación: Todas las isometrias son continuas, ejercicio

Entonces el objetivo sea ahora demostrar que x_n es una sucesión convergente, pero notando que y_n es una sucesión convergente, en particular es de Cauchy, y como se tiene .

$$\|x_n - x_m\| = \|y_n - y_m\|$$

Es cierto tambien que x_n es una sucesión de Cauchy, y como X es Banach, efectivamente $x_n \rightarrow x$, con $x \in X$.

Ahora aplicando esto al caso de arriba, es decir $X = E$, $Y = E^{**}$, y $T = J$, podemos concluir que E se puede ver identificar como un subespacio vectorial cerrado de E^{**} , así que gruesamente $E \subseteq E^{**}$.

P2. [Ortogonalidad]

[Notación] Sea E un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$.

Si $M \subseteq E$ es un subespacio vectorial, luego

$$M^\perp = \{f \in E^* : \langle f, x \rangle = 0 \ \forall x \in M\}$$

Ahora si $N \subseteq E^*$ es un subespacio vectorial:

$$N^\perp = \{x \in E : \langle f, x \rangle = 0 \ \forall f \in N\}$$

- Pruebe que $(M^\perp)^\perp = \overline{M}$

Una solución:

Como a priori es muy difícil trabajar con $(M^\perp)^\perp$, tratemos de ver la otra inclusión, pero antes notemos que $(M^\perp)^\perp = \bigcap_{f \in M^\perp} \text{Ker}(f)$, al ser la intersección de cerrados, es cerrado por lo que para ver la inclusión $\bar{M} \subseteq (M^\perp)^\perp$, basta ver que $M \subseteq (M^\perp)^\perp$, en efecto sea $m \in M$, y $f \in M^\perp$, por definición de f , se tiene que $f(m) = 0$, queda así demostrada la inclusión.

Se tiene $\bar{M} \subseteq (M^\perp)^\perp$, ahora se busca demostrar la igualdad, para esto, procedamos por contradicción, supongamos que $\bar{M} \neq (M^\perp)^\perp$, es decir existe un $x_0 \in (M^\perp)^\perp$, tal que $x_0 \notin \bar{M}$, ahora recordamos que $(M^\perp)^\perp$ es un objeto definido en base a funcionales, por lo que sería interesante trabajar con un funcional que cumpla ciertas propiedades en relación a x_0 , la manera de fabricar este funcional, sera usando Hahn-Banach geometrico, Como $\bar{M}$ es un conjunto cerrado, y $\{x_0\}$ es un compacto, el teorema nos fabrica un $f \in E^*$, que nos separa estrictamente estos conjuntos, es decir, existen γ_1, γ_2 , $\gamma_1 < \gamma_2$ tal que:

$$f(x) < \gamma_1 < \gamma_2 < f(x_0) \quad \forall x \in \bar{M}$$

Como M es s.e.v en particular tiene al 0, es decir podemos concluir que $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < f(x_0)$, el objetivo ahora sera demostrar que $f \in M^\perp$, ya que si se logra demostrar esto, se llegaría a una contradicción, ya que $f(x_0)$, debe ser 0, ya que $x_0 \in (M^\perp)^\perp$, pero $f(x_0) > 0$

Para ver que $f \in M^\perp$, supongamos que existe algún punto de M tal que $f(m) \neq 0$, luego si consideramos $\bar{m} = \frac{m}{f(m)}$, se tiene que $f(\bar{m}) = 1$, y $\bar{m} \in M$, ya que M es s.e.v, pero como:

$$f(\bar{m}) < \gamma_1$$

Podemos considerar $\tilde{n} = 2\gamma_1\bar{m}$, de esta forma $f(\tilde{n}) = 2\gamma_1 < \gamma_1$, derivando una contradicción.

Es decir efectivamente $f \in M^\perp$, y por el argumento de arriba llegamos a una contradicción con la negación que afirmaba que $\bar{M} \neq M^{**}$.

P3. Definición Sea C un subconjunto convexo de un espacio vectorial real X . Una función $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ se llama afín, si:

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) = (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

para todo $\lambda \in [0, 1]$, y $x, y \in C$.

El objetivo de este problema es probar el teorema de **Markov-Kakutani** que dice lo siguiente: Sea K un compacto convexo no vacío de un e.v.t localmente convexo y G un conjunto de operadores afines continuos que conmutan, es decir si f y $g \in G$, entonces $f(g(x)) = g(f(x)) \forall x \in X$. Entonces existe un punto fijo común para todos los operadores afines.

Para demostrar esto se sugiere el siguiente esquema.

- **Parte 1** Demostrarlo en el caso en que $G = \{T\}$

a) Para x en K , defina el elemento:

$$x_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n T^k(x)$$

Con $T^0 = Id$

Pruebe que $x_n \in C \forall n \in \mathbb{N}$ y que existe una subred convergente en C tal que $x(N_1) \rightarrow y$.

b) Pruebe que basta demostrar que para cada f en el dual de X , $f(T(y)) = f(y)$.

c) Demuestre que para cada f en el dual de X , efectivamente $f(T(y)) = f(y)$ y concluya.

- **Parte 2** Ahora el objetivo es demostrar el resultado para la familia completa.

- Sea $f \in G$, considere el conjunto

$$\text{Fix}(f) = \{x \in C : f(x) = x\}$$

Concluya por la parte anterior que es no vacío, pruebe que es compacto y convexo, sea $g \in G$, y $x \in \text{Fix}(f)$, pruebe que $g(x) \in \text{Fix}(f)$, use la Parte 1, con $C = \text{Fix}(f)$, y g , y concluya que $\text{Fix}(f) \cap \text{Fix}(g) \neq \emptyset$

- Pruebe por inducción que para cada subconjunto A finito de G , $\bigcap_{\phi \in A} \text{Fix}(\phi) \neq \emptyset$
- Concluya usando la propiedad de intersección finita, que $\bigcap_{g \in G} \text{Fix}(g) \neq \emptyset$.

Parte 1:

- $x_n \in C$ ya que es una combinación convexa de elementos en C , $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión, en particular es una red, y al ser C compacto, existe alguna subred convergente, tal que $x(N_1) \rightarrow y$, con $y \in C$, de ahora en adelante nuestro candidato a punto fijo es y
- Basta demostrar esto, porque en un e.v.t localmente convexo el dual separa puntos, es decir si $\forall f \in E^* f(Ty) = y$, es posible concluir que $Ty = y$.
- Para demostrar esto, bastara demostrar que $f(Ty - y) = 0$, para ello, haremos un argumento de limites, trabajando con x_n , ya que y es el limite de una subred de x_n , luego

$$f(T(x_n) - x_n) = f\left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n T^{k+1}(x) - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n T^k(x)\right)$$

Acá se uso que T era afín, para demostrar que $T\left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n T^k(x)\right) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n T^{k+1}(x)$ Retomando la igualdad anterior, se puede apreciar una suma telescópica, ahora como C es un compacto, y f es una función continua, $f(C)$ es un compacto en $\mathbb{R}$, en particular es acotado, i.e $f(C) \subseteq (-M, M)$, luego tomando valor absoluto, a la igualdad de arriba, se tiene:

$$f(T(x_n) - x_n) = \frac{1}{n+1} |f(T^{n+1}(x) - x)| \leq \frac{M}{n+1}$$

$$f(T(x_n) - x_n) = f\left(\frac{1}{n+1} (T^{n+1}(x) - x)\right) = \frac{1}{n+1} f(T^{n+1}(x) - x)$$

luego tomando $n \rightarrow \infty$, se concluye $\lim_{n \rightarrow \infty} f(T(x_n) - x_n) = 0$, en particular para la subred, se tiene $\lim_{N_1} f(T(x_n(N_1)) - x_n(N_1)) = f(T(y) - y)$, i.e efectivamente $f(Ty) = y$.

Parte 2:

- Se puede probar que C es compacto, convexo y que $g : \text{Fix}(f) \rightarrow \text{Fix}(f)$, con lo que usando la parte 1, se concluye que $\text{Fix}(f) \cap \text{Fix}(g) \neq \emptyset$
- Por inducción y en el paso inductivo, se usa la parte anterior.
- Como C es compacto, es valida la P.I.F, y se concluye que $\bigcap_{g \in G} \text{Fix}(g) \neq \emptyset$

P4. [Propuesto] Sea E un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$, y $C \subseteq E$ un convexo tal que $0 \in C$: Sean

$$C^* = \{f \in E^* : \langle f, x \rangle \leq 1 \quad \forall x \in C\}$$

$$C^{**} = \{x \in E : \langle f, x \rangle \leq 1 \quad \forall f \in C^*\}$$

- Pruebe que $C^{**} = \overline{C}$