Departamento de Ingeniería Matemática
MA4801-1 Análisis Funcional
Profesora: Salome Martínez
Primavera 2022

Auxiliar 7: Dualidad

Auxiliares : Martín Berríos, Diego Céspedes, Felipe Espinosa

P1. [Dualidad en un e.v.n]
Sea E un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$, y sea E^*su espacio dual, con la norma:

$$||f||_{E^*} = \sup_{x\in E, ||x||\leq 1} |\langle f, x\rangle|$$

El bidual de E^{**} es el dual de E^*, con la norma

$$||\xi||_{E^{\star\star}} = \sup_{f\in E^\star, ||f||\leq 1} |\langle \xi, f\rangle|$$

, Se define la inyección canónica $J : E \to E^{\star\star}$ de la siguiente forma, dado un $x \in E$, , la función $f \to \langle f, x\rangle$ es un funcional continuo lineal en $E^\star$, es decir un elemento de $E^{\star\star}$, pruebe las siguientes propiedades.

a) Pruebe que J es una isometría, es decir $||Jx||_{E^{\star\star}} = ||x||_E$,

b) Ahora sean, X, Y espacios de Banach, y $T : X \to Y$ una isometria , pruebe que $T(X)$ es un subespacio vectorial cerrrado de Y, concluya ahora que cuando E es un espacio de Banach, se puede identificar coherentemente con un subespacio de $E^{\star\star}$

P2. [Ortogonalidad]
[**Notación**]Sea E un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$.
Si $M \subseteq E$ es un subespacio vectorial, luego

$$M^\perp = \{f \in E^* : \langle f, x\rangle = 0 \;\; \forall x \in M\}$$

Ahora si $N \subseteq E^*$ es un subespacio vectorial:

$$N^\perp = \{x \in E : \langle f, x\rangle = 0 \;\; \forall f \in N\}$$

- Pruebe que $(M^\perp)^\perp = \overline{M}$

P3. Definición Sea C un subconjunto convexo de un espacio vectorial real X. Una función $f : C \to C$ se llama afín, si:

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) = (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

para todo $\lambda \in [0, 1]$, y $x, y \in C$.
El objetivo de este problema es probar el teorema de **Markov-Kakutani** que dice lo siguiente: Sea K un compacto convexo no vació de un e.v.t localmente convexo y G un conjunto de operadores afines continuos que conmutan, es decir si f y $g \in G$, entonces $f(g(x)) = g(f(x))\forall x \in X$. Entonces existe un punto fijo común para todos los operadores afines.
Para demostrar esto se sugiere el siguiente esquema.

- **Parte 1** Demostrarlo en el caso en que $G = \{T\}$
  a) Para x en K, defina el elemento:

  $$x_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} T^k(x)$$

  Con $T^0 = Id$
  Pruebe que $x_n \in C$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y que existe una subred convergente en C tal que $x(N_1) \to y$.
  b) Pruebe que basta demostrar que para cada f en el dual de X, $f(T(y)) = f(y)$.
  c) Demuestre que para cada f en el dual de X, efectivamente $f(T(y)) = f(y)$ y concluya.
- **Parte 2** Ahora el objetivo es demostrar el resultado para la familia completa.
  - Sea $f \in G$, considere el conjunto

    $$Fix(f) = \{x \in C : f(x) = x\}$$

    Concluya por la parte anterior que es no vació, pruebe que es compacto y convexo, sea $g \in G$, y $x \in Fix(f)$, pruebe que $g(x) \in Fix(f)$, use la Parte 1, con $C = Fix(f)$, y g, y concluya que $Fix(f) \cap Fix(g) \neq \emptyset$
  - Pruebe por inducción que para cada subconjunto A finito de G, $\bigcap_{\phi \in A} Fix(\phi) \neq \emptyset$
  - Concluya usando la propiedad de intersección finita, que $\bigcap_{g \in G} Fix(g) \neq \emptyset$.

P4. [**Propuesto**] Sea E un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$, y $C \subseteq$ un convexo tal que $0 \in C$: Sean

$$C^\star = \{f \in E^\star : \langle f, x\rangle \leq 1 \ \ \forall x \in C\}$$

$$C^{\star\star} = \{x \in E : \langle f, x\rangle \leq 1 \ \ \forall x \in C^\star\}$$

- Pruebe que $C^{\star\star} = \overline{C}$