Departamento de Ingeniería Matemática
MA4801-1 Análisis Funcional
Profesora: Salome Martínez
Primavera 2022

Auxiliar 4:ELC

Auxiliares : Martín Berríos, Diego Céspedes, Felipe Espinosa

P1. [**Separación**] Sea V un abierto que contiene al 0 en un e.v.t. Demuestre que existe una función continua f a valores reales tal que $f(0) = 0$ y que $f(x) = 1$ fuera de V.
Hint: Sean V_n vecindades del 0, tal que $V_1 + V_1 \subseteq V$, y $V_{n+1} + V_{n+1} \subseteq V_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Construir una f como en un teorema anterior, mostrar que f es continua en 0 y que :

$$|f(x) - f(y)| \leq f(x - y)$$

[**Propuesto**]: Pruebe que con la función anterior se puede concluir el siguiente resultado. Sea D un cerrado de X y $c \notin D$, entonces existe una función continua a valores reales, tal que $f(c) = 0$ y $f = 1$ en D.

P2. Sea $X = \{f | f : [0,1] \to \mathbb{C}\}$, topologizado por la familia de seminormas.

$$p_x(f) = |f(x)| \ \forall x \ \ 0 \leq x \leq 1$$

Esta topología se llama *Topología de la convergencia puntual*:

a) Pruebe que es una familia separante de seminormas.

b) Justifique el nombre de la topología.

c) Sea $F \subseteq X$, entonces pruebe que:

$$\mathcal{F} \text{ es acotado} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \ 0 \leq x \leq 1 \ \ \exists c > 0 \ \ |f(x)| < c \ \ \forall f \in \mathcal{F}$$

P3. [**Sorprendente**]

a) Sea X un e.v.t y $f : X \to \mathbb{R}$ lineal y no nula, pruebe que es abierta, i.e mapea abiertos en abiertos.

b) Sea X un e.v.t y $f : X \to R$ lineal no nula, pruebe que si A es convexo y abierto entonces $f(A)$ es un intervalo abierto.

P4. Conexidad Sea X un e.v.t sobre $\mathbb{R}$.

a) Pruebe que un e.v.t es conexo

b) Sea X un e.v.t localmente convexo , y G un abierto conexo y no vació de X, pruebe que G es arco-conexo.

P5. [**Propuesto**] Sea X un e.v.t localmente convexo

Si $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, entonces demuestre que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k = 0$$