Control óptimo estocástico: Sesión 3

MA4703 - Control Óptimo
Héctor Ramírez, Nicolás Hernández[1]

[1] CMM, Universidad de Chile

Semestre primavera, 2022

Recuerdo

Recordemos el problema de **control estocástico** en **horizonte finito**

$$v(t,x) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}(t,x)} J(t,x,\alpha),$$

donde el funcional $J : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{A}(t,x) \to \mathbb{R}$ está definido por

$$J(t,x,\alpha) = \mathbb{E}\left[\int_t^T f(s, X_s^{t,x}, \alpha_s)ds + g(X_T^{t,x})\right],$$

y el **proceso controlado** sigue la dinámica

$$dX_s = b(X_s,\alpha_s)ds + \sigma(X_s,\alpha_s)dW_s.$$

Recuerdo

Recordemos el problema de **control estocástico** en **horizonte finito**

$$v(t,x) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}(t,x)} J(t,x,\alpha),$$

donde el funcional $J : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{A}(t,x) \to \mathbb{R}$ está definido por

$$J(t,x,\alpha) = \mathbb{E}\left[\int_t^T f(s, X_s^{t,x}, \alpha_s) ds + g(X_T^{t,x})\right],$$

y el **proceso controlado** sigue la dinámica

$$dX_s = b(X_s, \alpha_s) ds + \sigma(X_s, \alpha_s) dW_s.$$

Definimos el **operador diferencial** asociado a dicha dinámica

$$\mathcal{L}^a v = b(x,a)^t D_x v + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\sigma(x,a)\sigma^\top(x,a) D_x^2 v\right).$$

Cálculo diferencial estocástico

Definimos el **operador diferencial** asociado a dicha dinámica

$$\mathcal{L}^a v = b(x,a)^t D_x v + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\sigma(x,a)\sigma^\top(x,a) D_x^2 v\right).$$

Definición: Fórmula de Itô

Sea f una función de clase $\mathcal{C}^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ y sea X una solución de la EDE

$$dX_u = b(X_u,\alpha_u)du + \sigma(X_u,\alpha_u)dW_u.$$

Entonces para cualquier $t \geq s$ se tiene

$$f(t,X_t) = f(s,X_s) + \int_s^t \frac{\partial f}{\partial t}(u,X_u) + \mathcal{L}^{\alpha_u} f(u,X_u)du + \int_s^t D_x f(u,X_u)^t \sigma(u,X_u)dW_u.$$

Idea: Evaluando la función valor en el proceso controlado nos da

$$v(t+h, X_{t+h}^{t,x}) = v(t,x) + \int_t^{t+h}\left(\frac{\partial v}{\partial t} + \mathcal{L}^{\alpha^\star} v\right)(s, X_s^{t,x})ds + \text{ martingala (local).}$$

Definición. La ecuación HJB asociada al problema de control estocástico en **horizonte finito** es

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) - H(t,x,D_x v(t,x), D_x^2 v(t,x)) = 0, \quad \forall (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n,$$
$$v(T,x) = g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Donde el **Hamiltoniano** asociado está dado por

$$H(t,x,p,M) = \sup_{a \in A} \left[b(x,a)p + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\sigma\sigma^\top(x,a)M) + f(t,x,a) \right].$$

Teorema. Sea w una función en $C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ que satisface

$$|w(t,x)| \leq C(1+|x|^2), \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n.$$

Supongamos que $w(T,\cdot) = g$ y que

$$-\frac{\partial w}{\partial t}(t,x) - H(t,x,D_x w(t,x), D_x^2 w(t,x)) = 0, \quad \forall (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n.$$

Supongamos además que existe una función **medible** $\hat{\alpha}(t,x)$ con valores en A tal que

$$\sup_{a \in A} [\mathcal{L}^a w(t,x) + f(t,x,a)] = \mathcal{L}^{\hat{\alpha}(t,x)} w(t,x) + f(t,x,\hat{\alpha}(t,x)),$$

y tal que la EDE

$$dX_s = b(X_s, \hat{\alpha}(s,X_s))ds + \sigma(X_s, \hat{\alpha}(s,X_s))dW_s$$

tiene una única solución, denotada $\hat{X}_s^{t,x}$, de condición inicial $X_t = x$, tal que el proceso $\hat{\alpha} := \{\hat{\alpha}(s, \hat{X}_s^{t,x}) : s \in [t,T]\}$ pertenece a $\mathcal{A}(t,x)$.

Entonces $w = v$, es la **función valor** del problema y el control $\hat{\alpha}$ es **óptimo**.

Demostración. (i) Como w es de clase $C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$, tenemos para todo (t,x), para todo control $\alpha\in\mathcal{A}(t,x)$, $s\geq t$ y todo tiempo de parada $\tau\geq t$

$$w(s\wedge\tau, X^{t,x}_{s\wedge\tau}) = w(t,x) + \int_t^{s\wedge\tau}\frac{\partial w}{\partial t}(u,X^{t,x}_u)du + \mathcal{L}^{\alpha_u}w(u,X^{t,x}_u)du$$

$$+\int_t^{s\wedge\tau} D_x w(u,X^{t,x}_u)^t\sigma(X^{t,x}_u,\alpha_u)dW_u.$$

Demostración. (i) Como w es de clase $C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$, tenemos para todo (t,x), para todo control $\alpha\in\mathcal{A}(t,x)$, $s\geq t$ y todo tiempo de parada $\tau\geq t$

$$w(s\wedge\tau, X^{t,x}_{s\wedge\tau}) = w(t,x) + \int_t^{s\wedge\tau}\frac{\partial w}{\partial t}(u,X^{t,x}_u)du + \mathcal{L}^{\alpha_u}w(u,X^{t,x}_u)du + \int_t^{s\wedge\tau} D_x w(u,X^{t,x}_u)^t\sigma(X^{t,x}_u,\alpha_u)dW_u.$$

Escogiendo tiempos de parada convenientes, por ejemplo

$$\tau_n = \inf\{s\geq t : \int_t^s |D_x w(u,X^{t,x}_u)^t\sigma(X^{t,x}_u,\alpha_u)|^2du\geq n\},$$

notemos que $\tau_n\to\infty$ cuando $n\to\infty$ y el término en rojo arriba es una martingala. Tomando esperanza se obtiene

$$\mathbb{E}\left[w(s\wedge\tau_n, X^{t,x}_{s\wedge\tau_n})\right] = w(t,x) + \mathbb{E}\left[\int_t^{s\wedge\tau_n}\frac{\partial w}{\partial t}(u,X^{t,x}_u)du + \mathcal{L}^{\alpha_u}w(u,X^{t,x}_u)du\right].$$

Como w es solución de la ecuación HJB, para todo control α se tiene

$$\frac{\partial w}{\partial t}(u, X_u^{t,x}) + \mathcal{L}^{\alpha_u} w(u, X_u^{t,x}) + f(u, X_u^{t,x}, \alpha_u) \leq 0, \tag{1}$$

y por lo tanto sigue que

$$\mathbb{E}\left[w(s \wedge \tau_n, X_{s\wedge\tau_n}^{t,x})\right] \leq w(t,x) - \mathbb{E}\left[\int_t^{s\wedge\tau_n} f(u, X_u^{t,x}, \alpha_u) du\right].$$

Como w es solución de la ecuación HJB, para todo control α se tiene

$$\frac{\partial w}{\partial t}(u, X_u^{t,x}) + \mathcal{L}^{\alpha_u} w(u, X_u^{t,x}) + f(u, X_u^{t,x}, \alpha_u) \leq 0, \tag{1}$$

y por lo tanto sigue que

$$\mathbb{E}\left[w(s \wedge \tau_n, X_{s\wedge\tau_n}^{t,x})\right] \leq w(t,x) - \mathbb{E}\left[\int_t^{s\wedge\tau_n} f(u, X_u^{t,x}, \alpha_u) du\right].$$

Omitiendo algunos detalles técnicos (todos los términos anteriores están acotados por variables integrables) podemos hacer $n \to \infty$ y usar el teorema de **convergencia dominada** para obtener

$$\mathbb{E}\left[w(s, X_s^{t,x})\right] \leq w(t,x) - \mathbb{E}\left[\int_t^{s} f(u, X_u^{t,x}, \alpha_u) du\right].$$

Como w es continua, hacemos ahora $s \to T$ y obtenemos por el teorema de convergencia dominada

$$\mathbb{E}\left[g(X_T^{t,x})\right] \leq w(t,x) - \mathbb{E}\left[\int_t^{T} f(u, X_u^{t,x}, \alpha_u) du\right], \qquad \forall \alpha \in \mathcal{A}(t,x).$$

lo que implica, por la arbitrariedad de α, que $v \leq w$.

(ii) Para demostrar la igualdad de estas funciones y la optimalidad del control $\hat{\alpha}$, repetimos los pasos anteriores esta vez con $w(u, \hat{X}_u^{t,x})$ y notando que el control $\hat{\alpha}(u, X_u^{t,x})$ alcanza la igualdad en (1). Por lo tanto

$$\mathbb{E}\left[w(s, \hat{X}_s^{t,x})\right] = w(t,x) - \mathbb{E}\left[\int_t^s f(u, \hat{X}_u^{t,x}, \hat{\alpha}(u, \hat{X}_u^{t,x}))du\right].$$

(ii) Para demostrar la igualdad de estas funciones y la optimalidad del control $\hat{\alpha}$, repetimos los pasos anteriores esta vez con $w(u, \hat{X}_u^{t,x})$ y notando que el control $\hat{\alpha}(u, X_u^{t,x})$ alcanza la igualdad en (1). Por lo tanto

$$\mathbb{E}\left[w(s, \hat{X}_s^{t,x})\right] = w(t,x) - \mathbb{E}\left[\int_t^s f(u, \hat{X}_u^{t,x}, \hat{\alpha}(u, \hat{X}_u^{t,x}))du\right].$$

Haciendo $s \to T$, sigue entonces

$$w(t,x) = \mathbb{E}\left[\int_t^T f(u, \hat{X}_u^{t,x}, \hat{\alpha}(u, \hat{X}_u^{t,x}))du + g(\hat{X}_T^{t,x})\right] = J(t,x,\hat{\alpha}).$$

Lo que implica que $w \leq v$. Por lo tanto w es igual a la **función valor**, $w = v$ y el control $\hat{\alpha}$ es **óptimo**.

Distribución de portafolio.

Recordemos el **mercado financiero** con **dos activos**, con precios de dinámicas

$$\begin{aligned} dS_t^0 &= rS_t^0 dt, \\ dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t. \end{aligned}$$

Un agente invierte dinámicamente una **proporción** α_t de su riqueza en el activo riesgoso y $(1-\alpha_t)$ en el activo sin riesgo. El control α toma valores en un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ cerrado y convexo.

El proceso de riqueza (**portafolio autofinanciado**) sigue la dinámica

$$\begin{aligned} dX_t &= \frac{X_t \alpha_t}{S_t} dS_t + \frac{X_t(1-\alpha_t)}{S_t^0} dS_t^0 \\ &= X_t(\alpha_t \mu + (1-\alpha_t) r) dt + X_t \alpha_t \sigma dW_t. \end{aligned}$$

Denotamos por $\mathcal{A}$ el conjunto de procesos **adaptados**, con valores en A, y tales que $\int_0^T |\alpha_s|^2 ds < \infty$ c.t.p. Definimos la función valor del agente como

$$v(t,x) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathbb{E}[U(X_T^{t,x})], \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}_+.$$

Asumiendo una función de utilidad del tipo CRRA, con $p \in (0,1)$

$$U(x) = \frac{x^p}{p}, \quad x \geq 0,$$

el problema se puede resolver **explícitamente**. La ecuación HJB asociada es

$$-\frac{\partial w}{\partial t}(t,x) - \sup_{a \in A} \left[\mathcal{L}^a w(t,x)\right] = 0, \quad (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}_+,$$
$$w(T,x) = U(x), \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

con $\mathcal{L}^a w(t,x) = x(a\mu + (1-a)r)\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2}x^2 a^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

Por **separación de variables**, buscamos una solución de la forma $w(t,x) = \phi(t)U(x)$, para una función positiva ϕ que satisface

$$\phi'(t) + \rho\phi(t) = 0, \quad \phi(T) = 1,$$

con

$$\rho = p \sup_{a \in A}[a(\mu - r) + r - \frac{1}{2}a^2(1-p)\sigma^2],$$

lo que nos da $\phi(t) = \exp(\rho(T-t))$.

Por lo tanto

$$w(t,x) = \exp(\rho(T-t))U(x).$$

Notemos que la función

$$a \mapsto a(\mu - r) + r - \frac{1}{2}a^2(1-p)\sigma^2,$$

es estrictamente cóncava en el convexo cerrado A por lo tanto **alcanza un máximo** en algún $\hat{a}$, que también maximizará $a \mapsto \mathcal{L}^a w(t,x)$ para todo (t,x).

Tenemos por lo tanto (usando el teorema de verificación), que w arriba es la función valor, el control óptimo es **constante** igual a $\hat{a}$ y el proceso de riqueza correspondiente

$$dX_t = X_t(\hat{a}\mu + (1-\hat{a})r)dt + X_t\hat{a}\sigma dW_t.$$

Por ejemplo, en el caso irrestricto para el agente, $A = \mathbb{R}$, se obtiene

$$\hat{a} = \frac{\mu - r}{\sigma^2(1-p)}, \quad \rho = \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2}\frac{p}{1-p} + rp.$$

Función valor de un problema en **horizonte infinito**:

$$v(x) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}(x)} \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\beta s} f(X_s^{x,\alpha}, \alpha_s) ds\right].$$

Definimos el **Hamiltoniano** $H : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times d} \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$H(x,p,M) := \sup_{a\in A} \left(b(x,a)\cdot p + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\big(\sigma(x,a)\sigma^\top(x,a)M\big) + f(x,a) \right).$$

La ecuación **Hamilton-Jacobi-Bellman** asociada al problema es

$$\beta v(x) - H\big(x, D_x v(x), D_x^2 v(x)\big) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^d.$$