CAPÍTULO 2

Controlabilidad de sistemas lineales

En esta capítulo consideraremos un caso particular de la ecuación controlada (1.1), en la cual la dinámica tiene una estructura lineal:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t) \qquad \text{c.t.p. } t \in I; \quad x(0) = x_0, \tag{2.1}$$

donde $I \subseteq I\!R$ es un intervalo tal que $0 \in I$, $u(\cdot) \in \mathcal{A} = L^\infty_{loc}(I, U) := \{u : I \to U \subseteq I\!R^m : \ u(\cdot) \in L^\infty_{loc}(I, I\!R^m)\}$, y además $A(\cdot) \in L^1_{loc}(I, I\!R^{n\times n})$, $B(\cdot) \in L^1_{loc}(I, I\!R^{n\times m})$ y $r(\cdot) \in L^1_{loc}(I, I\!R^n)$. Para mayor comodidad, en caso que sea necesario también denotaremos el conjunto de controles admisibles por $\mathcal{A}_U$.

Definición 2.1. *Para* (2.1) *con* $x_0 \in V$, $T > 0$ *dados, definimos el* ***conjunto de puntos accesibles*** *desde* x_0 *en un tiempo* T *como:*

$$\mathrm{Acc}(x_0, T) := \{x(T; x_0, u(\cdot)) : u(\cdot) \in \mathcal{A}\}.$$

Adoptaremos la siguiente convención $\mathrm{Acc}(x_0, T) := \{x_0\}$ *si* $T = 0$. *Nuevamente, para mayor comodidad, en caso que sea necesario también denotaremos el conjunto anterior por* $\mathrm{Acc}_U(x_0, T)$.

Es sabido que la solución de (2.1) viene dada por la Fórmula de Variación de Parámetros

$$x(t) = X(t)x_0 + X(t)\int_0^t X(s)^{-1}(B(s)u(s) + r(s))ds, \tag{2.2}$$

donde $X(\cdot)$ corresponde a la resolvente de la ecuación homogénea $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$. En (2.2) se tiene que $X(\cdot) \in AC(I, I\!R^{n\times n})$, absolutamente continua, cuando $A(\cdot) \in L^1_{loc}(I, I\!R^{n\times n})$.

En lo que sigue nos será de utilidad definir los siguientes elementos

$$x_0^* := X(t)x_0 + X(t)\int_0^t X(s)^{-1}r(s)ds \tag{2.3}$$

y la función lineal $\Phi : \mathcal{A} \to I\!R^n$

$$\Phi(u(\cdot)) := X(t)\int^t X(s)^{-1}B(s)u(s)ds. \tag{2.4}$$

Así, de lo anterior obtenemos:

$$\mathrm{Acc}_U(x_0, T) = x_0^* + \Phi(\mathcal{A}_U) \tag{2.5}$$

Con lo cual podemos observar que si $x_0^* = 0$ y si $\mathcal{A}$ es un espacio vectorial, entonces $\mathrm{Acc}(x_0 = 0, T) = \mathrm{Im}(\Phi)$ es un espacio vectorial.

Proposición 2.2. *En el caso que $x_0 = 0$, $B(\cdot) \equiv B$ es constante, y $r(\cdot) \equiv 0$, entonces*

$$\mathrm{Acc}(0, T_1) \subseteq \mathrm{Acc}(0, T_2) \qquad \forall 0 \leq T_1 \leq T_2.$$

Demostración. Sean $T_1 \leq T_2$, sea $x_1 \in \mathrm{Acc}(0, T_1)$, es decir, existe $u_1(\cdot) \in \mathcal{A}$ tal que

$$\begin{aligned} x_1 &= X(T_1)x_0 + X(T_1)\int_0^{T_1} X(s)^{-1}(B(s)u_1(s))ds \\ &= X(T_1)\int_0^{T_1} X(s)^{-1}(B(s)u_1(s))ds \end{aligned}$$

Luego, tomamos

$$u(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, T_2 - T_1] \\ u_1(t - T_2 + T_1) & \text{si } t \in [T_2 - T_1, T_2] \end{cases}$$

Claramente $u(\cdot) \in \mathcal{A}$. Además, usando la fórmula de variación de parámetros (2.2) obtenemos

$$\begin{aligned} x(T_2; x_0, u(\cdot)) &= X(T_2)\int_0^{T_2} X(s)^{-1}Bu(s)ds \\ &= X(T_2)\int_{T_2 - T_1}^{T_2} X(s)^{-1}Bu_1(s - T_2 + T_1)ds. \end{aligned}$$

Luego, usando el cambio de variable $z = s - T_2 + T_1$ llegamos a:

$$x(T_2; x_0, u(\cdot)) = X(T_2)\int_0^{T_1} X(z + T_2 - T_1)^{-1}Bu_1(z)dz,$$

usando las propiedades de la resolvente llegamos a que lo anterior es

$$\begin{aligned} x(T_2; x_0, u(\cdot)) &= X(T_2)X(T_2 - T_1)^{-1}\int_0^{T_1} X(z)^{-1}Bu_1(z)dz \\ &= X(T_1)\int_0^{T_1} X(z)^{-1}Bu_1(z)dz = x_1. \end{aligned}$$

Es decir, este $u(\cdot)$ nos permite llegar en tiempo T_2 a x_1. Entonces, $x_1 \in \mathrm{Acc}(x_0, T_2)$. ■

Corolario 2.3. *Bajo las hipótesis del teorema anterior y suponiendo además que $\mathcal{A}$ es un espacio vectorial,,* $\mathrm{Acc}(x_0 = 0) := \bigcup_{T \geq 0} \mathrm{Acc}(0, T)$ *es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.*

Volvamos al caso general, donde tenemos la siguiente propiedad.

Proposición 2.4. *Si U es convexo entonces $\mathrm{Acc}_U(x_0,\ T)$ es convexo.*

Demostración. Si U convexo, entonces $\mathcal{A}_U = L^\infty_{loc}(I;U)$ es convexo. Luego, dado (4.18) y la linealidad de Φ obtenemos que $\mathrm{Acc}_U(x_0,T)$ es convexo. ■

Sorprendentemente en el resultado anterior no es necesaria la convexidad de U. Para demostrar esto, vamos a necesitar el siguiente lema:

Lema 2.5 (Lema de Lyapunov)**.** *Sea $T>0$ y $f \in L^1([0,T];\mathbb{R}^n)$. Entonces, el siguiente conjunto es convexo:*

$$\left\{ \int_A f(s)ds : A \subseteq [0,T] \text{ medible} \right\}$$

Demostración. Ver Apéndice **??**. ■

Teorema 2.6. *El conjunto* $\mathrm{Acc}(x_0,T)$ *es convexo.*

Demostración. Sean $x_1, x_2 \in \mathrm{Acc}(x_0,T),\ \lambda \in [0,1]$. Por definición, existen $u_1(\cdot), u_2(\cdot) \in \mathcal{A}$ tal que

$$x_i = x(T;x_0,u_i(\cdot)) = x_0^* + \Phi(u_i(\cdot)) = x_0^* + X(T)y_i \qquad i=1,2.$$

Definimos

$$C := \left\{ x_A = \begin{pmatrix} \int_A X(s)^{-1}B(s)u_1(s)ds \\ \int_A X(s)^{-1}B(s)u_2(s)ds \end{pmatrix} : A \subseteq [0,T] \text{ medible} \right\} \tag{2.6}$$

Por el lema de Lyapunov, C es convexo. Además, notemos que

$$x_{[0,T]} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad x_\emptyset = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como C es convexo entonces existe $A \subseteq [0,T]$ medible tal que $x_A = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in C$.

De esto, concluimos que $x_A + x_{A^c} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ y en consecuencia, $x_{A^c} = (1-\lambda)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Luego, definimos entonces

$$u(t) := \begin{cases} u_1(t) & \text{si } t \in A \\ u_2(t) & \text{si } t \in A^c \end{cases}$$

Claramente $u(\cdot) \in \mathcal{A}$ y por lo tanto $x_0^* + \Phi(u(\cdot)) \in \mathrm{Acc}(x_0,T)$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} x_0^* + \Phi(u(\cdot)) &= x_0^* + X(t)\int_0^T X(s)^{-1}B(s)u(s)ds \\ &= x_0^* + X(t)\left(\int_A X(s)^{-1}B(s)u_1(s)ds + \int_{A^c} X(s)^{-1}B(s)u_2(s)ds \right) \\ &= x_0^* + X(t)[\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2] = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \end{aligned}$$

concluyendo que $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \mathrm{Acc}(x_0,T)$, es decir, $\mathrm{Acc}(x_0,T)$ es convexo. ■

El sorprendente resultado anterior plantea naturalmente la siguiente interrogante:

Son los conjuntos $\mathrm{Acc}_U(x_0,T)$ **y** $\mathrm{Acc}_{co(U)}(x_0,T)$ **iguales?**

Aquí hemos denotado por $co(U)$ denota la envoltura convexa de U, es decir, al convexo más pequeño que contiene a U. Resolveremos esta interrogante y analizaremos sus consecuencias en la sección 2.4.

En lo que sigue, estudiaremos nuevas propiedades del conjunto de puntos accesibles.

Proposición 2.7. *Se tienen las siguientes propiedades:*

1. *Si U simétrico (i.e., $a \in U \Leftrightarrow -a \in U$), $r(\cdot) \equiv 0$ y $x_0 = 0$, entonces $\mathrm{Acc}_U(x_0, T)$ es simétrico.*

2. *Si U es compacto, entonces el conjunto $\mathrm{Acc}(x_0, T)$ varía continuamente con respecto a $T > 0$, es decir, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $|T_1 - T_2| \leq \delta$, entonces $\mathrm{dist}(\mathrm{Acc}(x_0, T_1),\ \mathrm{Acc}(x_0, T_2))$ ϵ, donde, $\mathrm{dist}(A, B) := \max\{\sup_{y \in A} d(y, B),\ \sup_{y \in B} d(y, A)\}$.*

Demostración. El primer punto de la proposición es directo. En efecto, notamos que si $x_1 \in \mathrm{Acc}_U(x_0, T)$ es alcanzado gracias al control $-u(\cdot)$, entonces basta tomar su inverso aditivo $-u(\cdot)$ y usar (2.5) para concluir que $-x_1 \in \mathrm{Acc}_U(x_0, T)$. El segundo punto, que no es directo como el anterior, queda como ejercicio propuesto para el lector. ■

En lo que sigue estudiaremos la compacidad del conjunto $\mathrm{Acc}_U(x_0, T)$. Para esto tendremos que imponer la compacidad sobre el conjunto U y regularidad adicional sobre $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ y $r(\cdot)$.

Teorema 2.8. *Sean $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $T > 0$, $A(\cdot) \in L^\infty_{loc}(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, $B(\cdot) \in L^\infty_{loc}(I, \mathbb{R}^{n\times m})$ y $r(\cdot) \in L^\infty_{loc}(I, \mathbb{R}^n)$ y $U \subseteq \mathbb{R}$ compacto. Entonces $\mathrm{Acc}_U(x_0, T)$ es un compacto.*

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathrm{Acc}_U(x_0, T)$. Por definición y la fórmula de variación de parámetros (2.2), para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $u_n(\cdot) \in \mathcal{A}_U = L^\infty_{loc}([0,T]; U) \subseteq L^p_{loc}([0,T]; U)$ tal que:

$$x_n = x(T; x_0, u_n(\cdot)) = X(T)x_0 + X(T)\int_0^T X(s)^{-1}(B(s)u_n(s) + r(s))ds. \tag{2.7}$$

Luego, como U es compacto, la sucesión $\{u_n(\cdot)\}$ está contenida en un acotado de $L^p_{loc}([0,T]; U)$, para cualquier $p \in [1, +\infty]$. En virtud del teorema de Banach-Alaoglu (Ver C.3, Teorema 3.15, del libro de Rudin [Rud91]), obtenemos (pasando a subsucesiones si es necesario) que

$$u_n(\cdot) \overset{*}{\rightharpoonup} u(\cdot) \text{ en } L^p([0,T]; U) \quad \text{(convergencia en la topología estrella débil)},$$

para algún $u(\cdot) \in L^p([0,T]; U)$. En particular, tomando $p = 2$ obtenemos $u_n(\cdot) \rightharpoonup u(\cdot)$ en $L^2([0,T]; U)$ (convergencia débil).

Adicionalmente, de (2.7) y del hecho que $\{u_n(\cdot)\}$ sean acotados en $L^p_{loc}([0,T]; U)$, deducimos que los x_n son acotados. Más aún, el mismo argumento para un $t \in [0,T]$ arbitrario (no necesariamente T) y usando que $\{u_n(\cdot)\}$ son acotados en $L^2([0,T], \mathbb{R}^n)$, obtenemos además que la sucesión $\{x_n(\cdot; x_0, u_n)\} =: \{x_n(\cdot)\}$ son acotados en $L^2([0,T], \mathbb{R}^n)$. Nuevamente por el teorema de Banach-Alaoglu, obtenemos que (pasando a subsucesiones si es necesario)

$$x_n(\cdot) \rightharpoonup x(\cdot) \text{ en } L^2([0,T], \mathbb{R}^n),$$

para cierto $x(\cdot) \in L^2([0,T]; I\!R^n)$. Así, dado que (2.1) nos dice que

$$\dot{x}_n(t) = A(t)x_n(t) + B(t)u_n(t), \quad t \in I \text{ c.t.p.},$$

se deduce que $\{\dot{x}_n(\cdot)\}$ es acotada en $L^2([0,T]; I\!R^n)$. Por lo tanto, $\{x_n(\cdot)\}$ es acotada en $H^1([0,T]; I\!R^n)$ (espacio cuyas funciones y derivadas están en $L^2([0,T]; I\!R^n)$).

Como $H^1([0,T]; I\!R^n)$ está incluido compactamente en $L^2([0,T]; I\!R^n)$ (Ver, por ejemplo, Teorema 1 de la Sección C.5.7 del libro de Evans [Eva10]), entonces concluimos que $x_n(\cdot) \to x(\cdot)$ en $L^2([0,T])$. Notando ahora que el lado derecho de (2.7) se puede escribir como:

$$x_0^* + \langle X(T)X(s)^{-1}B(s), u_n(s)\rangle_{L^2([0,T], I\!R^m)}$$

donde x_0^* fue definido en (2.3), de la convergencia $u_n(\cdot) \rightharpoonup u(\cdot)$ en L^2, se obtiene que

$$x(\cdot) = x(\cdot; x_0, u(\cdot)) = X(\cdot)x_0 + X(\cdot)\int_0^{\cdot} X(s)^{-1}(B(s)u(s) + r(s))ds$$

Finalmente, usando el hecho de que $x(\cdot)$ es continua en $[0,T]$ y de la recíproca del teorema de convergencia dominada, concluimos que $x_n \to x(T) = x(T; x_0, u(\cdot)) \in \mathrm{Acc}_U(x_0, T)$. ■

En lo que sigue formalizaremos el concepto de controlabilidad. Considerando el conjunto de puntos accesibles $\mathrm{Acc}(x_0, T)$, nos interesara conocer cuando podemos llevar el sistema controlado a cualquier punto de $I\!R^n$

Definición 2.9. *Diremos que el sistema* (2.1) *es controlable desde* $x_0 \in I\!R^n$ *en un tiempo* $T > 0$ *si* $Acc(x_0, T) = I\!R^n$. *También introduciremos las siguientes variantes:*

- *El sistema* (2.1) *es controlable en un tiempo* $T > 0$ *si* $\cap_{x_0 \in I\!R^n} Acc(x_0, T) = I\!R^n$.
- *El sistema* (2.1) *es controlable si* $\cap_{T>0} \cap_{x_0 \in I\!R^n} Acc(x_0, T) = I\!R^n$.

En las próximas secciones caracterizaremos estas definiciones para distintos tipos de controles. Para terminar estas sección, veremos un lema técnico que será de utilidad en las próximas secciones.

Lema 2.10. *El sistema* (2.1) *es controlable en un* $T > 0$ *si y solo si la función* $\Phi : \mathcal{A} \to I\!R^n$ *definida por*

$$u(\cdot) \mapsto \Phi(u(\cdot)) = X(T)\int_0^T X(s)^{-1}B(s)u(s)ds$$

es sobreyectiva.

Demostración. Supongamos que el sistema (2.1) es controlable en un tiempo $T > 0$ y mostremos que Φ es sobreyectiva. Notemos que para la condición inicial

$$\hat{x}_0 = -X(T)^{-1}\int_0^T X(T)X(s)^{-1}r(s)ds = \int_0^T X(s)^{-1}r(s)ds,$$

de la fórmula de variación de parámetros (2.2) se obtiene que $x(T; \hat{x}_0, u(\cdot)) = \Phi(u(\cdot))$ para todo control $u(\cdot) \in \mathcal{A}$. Concluimos entonces que $\Phi(\mathcal{A}) = \mathrm{Acc}(\hat{x}_0, T) = I\!R^n$.

Recíprocamente, para $x_0 \in I\!R^n$ arbitrario, tenemos que

$$\mathrm{Acc}(x_0, T) = x_0^* + \Phi(\mathcal{A}),$$

con x^* definido en (2.3) para $t = T$. Luego, si $\Phi(\mathcal{A}) = I\!R^n$ esto implica $Acc(x_0, T) = I\!R^n$. ■

2.1 Sistemas lineales autónomos sin restricciones en el control

En esta sección estudiaremos la controlabilidad en el caso que con controles no acotados, i.e., $U = \mathbb{R}^m$ (es decir, $u(\cdot) \in L^\infty_{\text{loc}}(I;\mathbb{R}^m)$) y cuando el sistema es autónomo, es decir, cuando $A(\cdot) \equiv A$, $B(\cdot) \equiv B$, $r(\cdot) \equiv 0$ (es decir, los datos son independientes del tiempo). Procederemos a mostrar uno de los resultados principales de este capítulo, el criterio de controlabilidad de Kalman.

Teorema 2.11. *El sistema* (2.1) *es controlable en un tiempo* $T > 0$ *si y solo si la matriz de Kalman* $K \in \mathbb{R}^{n\times nm}$*, definida como sigue:*

$$K = [B|AB|A^2B|\dots|A^{n-1}B],$$

tiene rango completo.

Demostración. Gracias al lema 2.10, basta mostrar que K no tiene rango completo si y sólo si $\Phi(\cdot)$ no es sobreyectiva. Supongamos que rango$(K) < n$, es decir, que existe un vector $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $v^\top K = 0$ (ya que las n filas de K son linealmente dependientes). De esto deducimos que $v^\top B = 0$ y que $v^\top A^k B = 0$ para todo $k \in \{1,\dots,n-1\}$. El teorema de Cayley-Hamilton (Ver C.7, Teorema 7.2, del libro de Bronson [Bro08]) nos dice que

$$p_A(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I_n = 0,$$

donde $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ es el polinomio característico de la matriz A, con a_i, $i = 0,\dots,n-1$, sus coeficientes. Multiplicando la expresión anterior por la izquierda por el vector $v^\top$, por la derecha por B, gracias a la observación anterior podemos concluir que

$$v^\top A^n B + a_{n-1}v^\top A^{n-1}B + a_1 v^\top AB + a_0 v^\top B = v^\top A^n B = 0.$$

Si multiplicamos $p_A(A)$ por A, y seguimos este procedimiento inductivamente obtenemos que $v^\top A^k B = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Esto nos lleva a que por definición $v^\top e^{sA} B = 0$, para todo $s \in \mathbb{R}$, donde e^A la matriz exponencial. Como en este caso, la resolvente viene dada por $X(s) = e^{sA}$, se obtiene

$$v^\top \Phi(u(\cdot)) = v^\top \int_0^T e^{(T-s)A} B u(\cdot) ds = 0, \text{ para todo } u(\cdot) \in \mathcal{A}.$$

Lo anterior quiere decir que $v \in \text{Im}(\Phi)^\perp$, con $v \neq 0$, lo que implica que $\Phi(\cdot)$ no es sobreyectiva,

Para la otra implicancia, si $\Phi(\cdot)$ no es sobreyectiva, por el teorema del núcleo-imágen (ver, por ejemplo, Teorema 2.3 del capítulo C.2 del libro de Friedberg [Fri10]), deducimos que $\dim(\text{Im}(\Phi)^\perp) = \dim(\text{Ker}\,\Phi) \geq 1$. De esto obtenemos la existencia de un $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que:

$$v^\top \Phi(u(\cdot)) = \int_0^T v^\top e^{(T-s)A} B u(s) ds = 0, \text{ para todo } u(\cdot) \in \mathcal{A}.$$

Por argumento de localización en $u(\cdot)$, deducimos que $v^\top e^{sA} B = 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Evaluando en $s = 0$ obtenemos $v^\top B = 0$. Derivando la expresión anterior y evaluando nuevamente en $s = 0$ obtenemos $v^\top AB = 0$. Inductivamente obtenemos que $v^\top A^k B = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Pero entonces $v^\top K = 0$ para $v \neq 0$, lo que quiere decir que rango$(K) < n$. ∎

Hemos demostrado que el sistema es controlable en $T > 0$ si y solo si existe la matriz K tiene rango completo. Notemos que en esta última condición, conocida como el criterio de Kalman, no depende del tiempo T. Lo anterior asegura entonces la controlabilidad para todo tiempo T positivo. Esto nos lleva al siguiente corolario.

Corolario 2.12. *En un sistema autónomo, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *El sistema* (2.1) *satisface el criterio de controlabilidad de Kalman.*
2. *El sistema* (2.1) *es controlable en* $T > 0$.
3. *El sistema* (2.1) *es controlable.*

2.2 Sistemas lineales no autónomos sin restricción sobre el control

Consideremos el sistema lineal (2.1) introducido anteriormente con $u(\cdot) \in \mathcal{A} = L^\infty_{loc}(I; \mathbb{R}^n)$. El siguiente teorema da una condición necesaria y suficiente para este caso y una cierta analogía con el criterio de Kalman.

Teorema 2.13. *El sistema dado por* (2.1) *es controlable en un tiempo* $T > 0$ *sí y solo sí el Gramiano (o matriz Gramiana) asociado a* (2.1)

$$G(T) := \int_0^T X^{-1}(s)B(s)B^\top(s)X^{-\top}(s)ds \tag{2.8}$$

es invertible.

Demostración. Demostremos el teorema por doble implicancia.

($\Longleftarrow$) De la fórmula de variación de parámetros (2.2) tenemos que

$$x(T; x_0, u(\cdot)) = x_0^* + X(T)\int_0^T X^{-1}(s)B(s)u(s)ds.$$

Notemos que si tomamos $u(s) = B^\top(s)X^{-\top}(s)\xi_0$ con $B(s), X^{-1}(s) \in L^\infty_{loc}$ (en los espacios correspondientes= y $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ arbitrario. Así, nos queda el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} x(T; x_0, u(\cdot)) = x_0^* + X(T)G(T)\xi_0 \\ u(\cdot) \in \mathcal{A} \end{cases} \tag{2.9}$$

Sea $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ arbitrario. Como por hipótesis $G(T)$ es invertible, podemos tomar $\xi_0 = G(T)^{-1}X^{-1}(T)(\tilde{x} - x_0^*)$, con lo que remplazando en (2.9) se obtiene que $x(T) = \tilde{x}$, por lo tanto (1) es controlable.

($\Longrightarrow$) Razonando por contra-recíproca supongamos que $G(T)$ no es invertible. Como $G(T)$ es simétrica semidefinida positiva, entonces necesariamente existe $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que

$$v^\top G(T)v = \int_0^T \|B^\top(s)X^{-\top}(s)v\|^2 ds = 0$$

Por lo que

$$v^\top X^{-1}(s)B(s) = 0 \quad \text{para todo } s \in [0, T] \text{ c.t.p.}$$

Con lo que integrando sobre s se obtiene que

$$v^\top \int_0^T X^{-1}(s)B(s)u(s)ds = 0, \qquad \forall u(\cdot) \in \mathcal{A}.$$

Ahora, para $\hat{v} := X^{-\top}(T)v$, lo anterior equivale a que

$$\hat{v}^\top \Phi(u(\cdot)) = \hat{v}^\top X(T) \int_0^T X^{-1}(s)B(s)u(s)ds = 0, \qquad \forall u(\cdot) \in \mathcal{A},$$

con $\Phi(\cdot)$ función lineal definida en (2.4).

Utilizando la fórmula de variación de parámetros (2.2) y lo anterior, se concluye que

$$\hat{v}^\top (x(T; x_0, u(\cdot) - x_0^*)) = 0, \qquad \forall u(\cdot) \in \mathcal{A},$$

es decir, se concluye que $Acc(x_0, T)$ está contenido en el hiperplano afín $x_0^* + \{\hat{v}\}^\perp$, el cual es subconjunto estricto de $I\!R^n$, y por lo tanto el sistema en estudio no es controlable. ■

Observación 2.14. *Notemos que en el caso autónomo $G(T)$ es invertible equivale a que se cumple la condición de Kalman. En efecto, recordando la expresión de la resolvente, que $G(T)$ no sea invertible equivale a que existe un $v \neq 0$ tal que $v^\top e^{sA}B = 0$ para todo s. Así*

$$\exists\ v \neq 0\ :\ v^T A^k B = 0 \quad \forall k = 0, 1, \ldots$$

Pero esto último, según lo visto en la demostración del Teorema 2.11, equivale justamente a que no se cumple la condición de Kalman.

Dado lo discutido hasta ahora, resulta conveniente caracterizar los puntos desde los cuales podemos controlar nuestra variable de estado para que llegue a un conjunto en determinado tiempo.

Definición 2.15. *Sean $T > 0$ y $\mathcal{T} \subseteq I\!R^n$ el conjunto objetivo, definimos el conjunto de puntos controlables a $\mathcal{T}$ en un tiempo T como*

$$\mathcal{C}_{\mathcal{T}}(T) := \{x_0 \in I\!R |\ \exists\ u(\cdot) \in \mathcal{A}\ :\ x(T; x_0, u(\cdot)) \in \mathcal{T}\}$$

Luego, definimos el conjunto de puntos controlables de $\mathcal{T}$ para algún tiempo como

$$\mathcal{C}_{\mathcal{T}} := \cup_{T \geq 0} \mathcal{C}_{\mathcal{T}}(T)$$

Notación 2.16. *En el caso que $\mathcal{T} = \{0\}$, se denotará a los conjuntos recién definidos por*

$$\mathcal{C}(T) := \mathcal{C}_{\mathcal{T}}(T) \quad \text{y} \quad \mathcal{C} := \mathcal{C}_{\mathcal{T}},$$

y se adoptará la convención $\mathcal{C}(0) = \{0\}$.

Definición 2.17. *Diremos que el sistema lineal* (2.1) *es controlable a $\mathcal{T}$ (o al origen) en un tiempo $T > 0$ si $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}(T) = I\!R^n$ (o $\mathcal{C}(T) = I\!R^n$).*

Ejemplo 2.18. *Consideremos el sistema lineal siguiente:*

$$\dot{x} = -x + u\ ,\ \mathcal{T} = \{0\},\ U = [-1, 1]$$

En este caso tenemos que $Acc(x_0 = 0, T) = [e^{-T} - 1, 1 - e^{-T}]$ y $\mathcal{C}(T) = [-e^T + 1, e^T - 1]$

Observación 2.19. *Notemos que si $r(\cdot) \equiv 0$, usando la fórmula de variación de parámetro se tiene de forma directa que $x_0 \in \mathcal{C}(T)$ sí y solo sí $x_0 = -\int_0^T X^{-1}(s)B(s)u(s)ds$ para cierto $u(\cdot) \in \mathcal{A}$.*

Gracias a la observación anterior, de manera directa se obtienen las siguientes propiedades básicas sobre el conjunto $\mathcal{C}(T)$.

Proposición 2.20. *Para el caso $r(\cdot) \equiv 0$, se tiene que:*

- *Si U es convexo, entonces $\mathcal{C}(T)$ es convexo.*
- *Si U es simétrico, entonces $\mathcal{C}(T)$ es simétrico.*
- *$\mathcal{C}(T) \subseteq \mathcal{C}(\tilde{T})$ para todo T, $\tilde{T}$ tal que $0 < T \leq \tilde{T}$.*
- *Si U es convexo (resp. simétrico), entonces $\mathcal{C}$ es convexo (resp. simétrico).*

Esta simetría entre $\mathrm{Acc}(x_0 = 0, T)$ y $\mathcal{C}(T)$ se puede formalizar en el caso autónomo mediante la dinámica inversa de (2.1). En efecto, como es usual denotemos

$$x(\cdot) := x(\cdot, x_0 = 0, u(\cdot))$$

para cierto $u(\cdot) \in \mathcal{A}$. Así, para las traslaciones $\tilde{x}(\xi) := x(T-\xi)$, $\tilde{u}(\xi) := u(T-\xi)$, obtenemos el siguiente sistema inverso:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(\xi) = -\dot{x}(T-\xi) = -Ax(T-\xi) - B\tilde{u}(\xi) \\ \tilde{x}(0) = x(T) \quad ; \quad \tilde{x}(T) = x_0 = 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

Así, obtenemos que $x_1 \in \mathrm{Acc}(x_0 = 0, T)$ (para el sistema (2.1)) sí y solo sí $x_1 \in \mathcal{C}(T)$ del sistema (2.10). En particular, hemos obtenido que (2.1) es controlable en T sí y solo sí (2.10) es controlable a 0 en un tiempo T. De la misma forma se deduce que (2.1) es controlable a 0 en un tiempo T sí y solo sí (su sistema inverso) (2.10) es controlable en T.

Notemos ahora que, para el caso $U = I\!R^m$, (2.1) es controlable sí y solo sí su sistema inverso (2.10) es controlable, esto debido a que sus matrices de Kalman coinciden. Más aún, la condición de Kalman no depende del punto inicial $x_0 = 0$ ni del tiempo T, por lo que en este caso controlabilidad equivale a la contrabilidad a 0 desde cualquier tiempo T.

A manera de resumen, se ha logrado la equivalencia de las siguientes proposiciones para el caso autónomo para un $T > 0$ dado:

(1) $\mathrm{Acc}(x_0 = 0, T) = I\!R^n$

(2) $\mathcal{C}(T) = I\!R^n$

(3) Se cumple el criterio de Kalman cuando $U = I\!R^m$

(4) El sistema es controlable (para cualquier tiempo) cuando $U = I\!R^m$

(5) El sistema es controlable a 0 para cualquier tiempo cuando $U = I\!R^m$

2.3 Sistemas lineales autónomos con restricciones en el control

En esta sección estudiaremos la controlabilidad a 0 en el caso el caso autónomo, es decir, el sistema (2.1) cuando $A(\cdot) \equiv A$, $B(\cdot) \equiv B$, $r(\cdot) \equiv 0$ (es decir, los datos son independientes del tiempo), y con controles acotados en conjuntos tipo "caja". Por simplicidad, consideraremos $U = [-1,1]^m$, pero los resultados mostrados en esta sección son ciertos también si consideramos un conjunto U convexo y simétrico, tal que $0 \in \operatorname{int} U$.

Teorema 2.21. *La condición de Kalman se satisface si y sólo si existe un tiempo $T > 0$ tal que $0 \in \operatorname{int}(\mathcal{C}(T))$.*

Demostración. Razonaremos por contrarecíproca.

Gracias al teorema de separación de Hahn-Banach, $0 \notin \operatorname{int} \mathcal{C}(T)$ si y sólo si existe $v \neq 0$ tal que para todo $x_0 \in \mathcal{C}(T)$ se tiene que $v^\top x_0 \leq 0$. Como $\mathcal{C}(T)$ es simétrico, lo anterior equivale a $v^\top x_0 = 0$ para todo $x_0 \in \mathcal{C}(T)$. Mediante la fórmula de variación de parámetros (2.2), se obtiene que lo anterior equivale a que $v^\top \Phi(\mathcal{A}) = 0$. Finalmente, como lo anterior implica que $\Phi(\cdot)$ no es sobreyectiva. Se concluye entonces, a partir del Lemma 2.10, que la condición de Kalman no se satisface.

Para la recíproca, si la condición de Kalman no se satisface, siguiendo los mismos argumentos dados en la demostración del Teorema 2.11, se deduce que $v^\top \Phi(\mathcal{A}) = 0$. Concluyendo el resultado deseado a partir de las equivalencias expuestas en el párrafo anterior. ■

Observación 2.22. *Dado que $\mathcal{C}(T) \subseteq \mathcal{C}(\tilde{T})$ para todo $T \leq \tilde{T}$, cuando $0 \in \operatorname{int}(\mathcal{C}(T))$, se tiene que $0 \in \operatorname{int}(\mathcal{C}(\tilde{T}))$ para todo $\tilde{T} \geq T$.*

Una consecuencia directa de lo anterior permite establecer condiciones que aseguren la controlabilidad a 0 en este caso particular.

Teorema 2.23. *Si la versión autónoma del sistema* (2.1)*, con $U = [-1,1]^m$, satisface la condición de Kalman y cumple además que los valores propios de la matrix A tienen todos parte real estrictamente negativa, entonces el sistema* (2.1) *es controlable a 0.*

Demostración. Basta recordar que si los valores propios de la matrix A tienen parte real estrictamente negativa entonces el sistema homogeneo $\dot{x}(\cdot) = Ax(\cdot)$ es globalmente asintóticamente estable y luego aplicar el Teorema 2.21. ■

Observación 2.24. *Este resultado también es cierto si los valores propios de la matrix A tienen parte real menores o igual que 0, sin embargo, en este caso el control debe ser* monoentrada*, i.e., $m = 1$.*

Ejemplo 2.25 (Resorte Amortiguado)**.** *Consideremos la siguiente ecuación*

$$\ddot{x} + c\dot{x} + kx = u \qquad (k > 0,\ c \in \mathbb{R})$$

Llevándolo a la forma (2.1) *(usando el cambio de variable $y = \dot{x}$)*

$$\dot{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + Bu \qquad \text{con } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -c \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ (r(\cdot) = 0)$$

Calculamos entonces la matriz de Kalman y tenemos el resultado correspondiente:

$$K = (B|AB) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ 1 & -c \end{array} \right)$$

el cual tiene rango 2, por lo que se satisface Kalman. Esto último implica particularmente que el sistema del resorte es controlable si $U = \mathbb{R}^m$*. Si ahora* $U = [-1, 1]$ *necesitamos además que se satisface la condición* $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$ *para todo* λ *valor propio de* A*. Analizaremos entonces la traza y el determinante de* A*:*

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{Tr}(A) = -c, \qquad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = k > 0.$$

Esto en particular quiere decir que $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$ *para todo* λ *valor propio de* A *si y sólo si* $c \geq 0$*. Por lo tanto, el sistema es controlable si es que* $c \geq 0$*.*

2.4 Principio del Bang-Bang

En esta sección introduciremos una clase particular de controles admisibles con fuertes implicancias prácticas y teóricas.

Definición 2.26. *Para controles con valores en* $U = [-1, 1]^m$ *un control* $u(\cdot)$ *admisible se dirá de tipo* Bang-Bang *en* $[0, T]$ *si para todo* $i = 1, \dots, m$ *se tiene que* $|u_i(t)| = 1$ *para* $t \in [0, T]$ *c.t.p.*

Presentamos el teorema que justificará la existencia de un control del tipo Bang-Bang que nos permita ir desde cualquier punto inicial al origen en un tiempo T.

Teorema 2.27. *Sean* $T > 0$ *y* $x_0 \in \mathcal{C}(T)$*, y consideremos la dinámica lineal* (2.1) *autónoma con controles tipo caja* $U = [-1, 1]^m$*. Entonces, existe un control tipo Bang-Bang que lleva* x_0 *a* 0 *en tiempo* T*.*

Demostración. Definamos el conjunto

$$\mathcal{K} = K(x_0, T) := \{u(\cdot)|_{[0,T]} : u(\cdot) \in \mathcal{A} \text{ y } x(T, x_0, u(\cdot)) = 0\}.$$

Así, $u(\cdot) \in \mathcal{K}$ si y sólo si $x_0 \in \mathcal{C}(T)$. En esta demostración mostraremos que $\mathcal{K}$ tiene puntos extremos y que estos coinciden con los controles tipo Bang-Bang.

La existencia de puntos extremos de $\mathcal{K}$ será consecuencia del *Teorema de Krein-Milman* (Ver el Capítulo 3, Teorema 3.65, del libro de Fabian [FHH+11]), para lo cual necesitamos demostrar que $\mathcal{K}$ es convexo y compacto débil-$*$ en $L^\infty(I, \mathbb{R}^m)$. Veamos primero la convexidad. Sean $\lambda \in (0, 1)$ y $u_1(\cdot), u_2(\cdot) \in K$. Como hemos visto, de la fórmula de variación de parámetros (2.2) sabemos $u(\cdot) \in \mathcal{K}$ equivale a decir que $x_0 = -\int_0^T e^{-sA} Bu(s)ds$. Luego, tenemos

$$\begin{aligned} -\int_0^T e^{-sA} B(\lambda u_1(s) + (1-\lambda)u_2(s))ds &= -\left[\lambda \int_0^T e^{-sA} Bu_1(s)ds + (1-\lambda) \int_0^T e^{-sA} Bu_2(s)ds\right] \\ &= \lambda \cdot x_0 + (1-\lambda)x_0 \\ &= x_0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, cualquier combinación convexa de elementos en $\mathcal{K}$ pertenece al conjunto. Esto quiere decir que $\mathcal{K}$ es convexo.

Ahora, procedamos a mostrar la compacidad débil-$*$ de $\mathcal{K}$ mediante su caracterización secuencial. Sea $\{u_n(\cdot)\}$ una sucesión de controles en $\mathcal{K}$, que es por definición un subconjunto de $L^\infty([0,T];U)$. Luego, por el teorema de Banach-Alaoglu, existe una subsucesión convergente, que sin pérdida de generalidad seguiremos llamando $\{u_n(\cdot)\}$, tal que $u_n \to \tilde{u}(\cdot)$ para cierto $\tilde{u}(\cdot) \in L^\infty([0,T];U)$. Así, obtenemos

$$x_0 = -\int_0^T e^{-sA} B u_n(s) ds \to x_0 = -\int_0^T e^{-sA} B\tilde{u}(s) ds.$$

Con esto, se concluye que $\tilde{u}(\cdot) \in \mathcal{K}$, y por lo tanto $\mathcal{K}$ es compacto para la topología débil-$*$.

Para concluir, mediante un argumento de introducción, mostraremos que los puntos extremos de $\mathcal{K}$ son los controles de tipo Bang-Bang. Supongamos entonces que existe $u^*(\cdot)$ punto extremo de $\mathcal{K}$ que no es Bang-Bang, es decir, para alguna de sus coordenadas existe un subconjunto del intervalo I de medida no nula, en el cual el valor absoluto del control es *estrictamente* menor a 1. Esto escrito usando cuantificadores se plantea como sigue:

$$\exists i \in \{1,\dots,m\}, \exists \varepsilon > 0, \exists F \subseteq [0,T],\ \mu(F) > 0,\ \forall t \in F\ :\ |u_i^*(t)| < 1-\varepsilon,$$

donde $\mu(\cdot)$ es la medida de Lebesgue en $I\!R$.

Sea $\beta(\cdot) \in L^\infty([0,T];I\!R)$. Definimos $I_F(\beta(\cdot)) := \int_F e^{-sA} B\beta(s) e_i ds$, una herramienta que nos será útil más adelante. En particular, tomemos un $\beta(\cdot)$ que cumpla $\beta(\cdot)|_F \not\equiv 0$ y $\beta(\cdot)|_{F^c} \equiv 0$ (es decir, que sea nula fuera de F), $|\beta(t)| \leq 1\ \forall t \in F$ y $I_F(\beta(\cdot)) = 0$. Se justificará la existencia de tal $\beta(\cdot)$ al final de esta demostración.

Definimos $u_\pm(\cdot) := u^*(\cdot) \pm \varepsilon\beta(\cdot) e_i$. Tenemos que $u_\pm \in \mathcal{K}$ ya que:

$$-\int_0^T e^{-sA} B u_\pm(s) ds = x_0 \pm \varepsilon I_F(\beta(\cdot)) = x_0 \pm 0 = x_0$$

Sumado a esto,

$$|(u_\pm)_i(t)| = |u_i^*(t) \pm \varepsilon\beta(t)| \leq |u_i^*(t)| + |\varepsilon\beta(t)| < (1+\varepsilon) + \varepsilon < 1$$

Sin embargo, $u^*(\cdot) = \dfrac{1}{2}u_+(\cdot) + \dfrac{1}{2}u_-(\cdot)$, lo que contradice el hecho de que $u^*(\cdot)$ sea punto extremo de $\mathcal{K}$.

Ahora, para finalizar, justificaremos la existencia de la función $\beta(\cdot)$ mencionada anteriormente. Sean $p > m$ y $\beta_1(\cdot),\dots,\beta_p(\cdot)$ funciones dadas en $L^\infty([0,T];I\!R)$ que satisfacen que $I_F(\beta_i(\cdot)) \neq 0$ para todo i, y definamos la función:

$$\hat{I}_F : I\!R^p \to I\!R^m; \quad \alpha \to \hat{I}_F(\alpha) = \sum_{j=1}^p \alpha_i I_F(\beta_j(\cdot))$$

Por el Teorema del Núcleo-Imagen (ver Capítulo 3, Teorema 3.2 en [Lan12]):

$$p = \dim(\mathrm{Ker}(\hat{I}_F)) + \dim(\mathrm{Im}(\hat{I}_F)).$$

Como $\dim(\mathrm{Im}(\hat{I}_F)) \leq m$ obtenemos que $\dim(\mathrm{Ker}(\hat{I}_F)) \geq p - m \geq 1$. Por lo que existe $\alpha^* \neq 0$ tal que $\hat{I}_F(\alpha^*) = 0$. Luego, para $\beta^*(\cdot) := \sum_j \alpha_j^* \beta_j(\cdot)$, que está en $\in L^\infty([0,T]; I\!R)$, se tiene $I_F(\beta^*(\cdot)) = 0$. Hemos así construido de manera explícita la siguiente función $\hat{\beta}(\cdot)$, dada por

$$\hat{\beta}(s) := \frac{\beta^*(s)(1 - \mathbf{1}_{F^c}(s))}{||\beta^*(\cdot)(1 - \mathbf{1}_{F^c}(\cdot))||}, \quad \text{para todo } s \in I,$$

que cumple con las condiciones requeridas. Acá, hemos denotado por $\mathbf{1}_\Omega(\cdot)$ la función indicatriz, que vale 1 si se está en el conjunto Ω y 0 si no. ■