Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3402, 22/08/22 Prof. R. Gouet, Prof. Aux. I. Reyes

Auxiliar #1

1. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una MAS del modelo de Poisson con parámetro $\theta > 0$. Es decir, las v.a. X_i son iid con ley de Poisson dada por

$$\mathbb{P}_\theta(X_i = k) = e^{-\theta}\theta^k/k!,\ k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Interesa estimar la función $g(\theta) = e^{-\theta} = \mathbb{P}_\theta(X_i = 0)$, para lo cual se proponen dos estimadores:

$$\hat{g}_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{x_i=0\}}, \quad \hat{g}_2(\mathbf{x}) = a^{\sum_{i=1}^{n} x_i},$$

donde a es una constante positiva.

a) Determinar el espacio de parámetros.

b) Calcular el Error Cuadrático Medio de cada uno y determinar si son insesgados o no.

2. Supóngase que las variables aleatorias $X_1, \ldots, X_n$ constituyen una muestra aleatoria simple (MAS) de tamaño n ($n \geq 2$) de una distribución uniforme sobre el intervalo $(0, \theta)$, con parámetro θ desconocido ($\theta > 0$) que se debe estimar. Recuerde, además, que para cualquier estimador $\hat{g}_1(X_1, \ldots, X_n)$ de $g(\theta)$, el Error Cuadrático Medio $ecm_\theta(\hat{g}_1)$ está dado por la ecuación

$$ecm_\theta(\hat{g}_1) = \mathbb{E}_\theta[(\hat{g}_1(X_1, \ldots, X_n) - g(\theta))^2].$$

a) Explique por qué el estimador $\hat{g}_1(X_1, \ldots, X_n)$=$2\bar{X}_n$ es estimador inadmisible de θ, donde $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

b) Determine $ecm_\theta(\hat{g}_1)$.

c) Sea $Y_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ y considere el estimador $\hat{g}_2(X_1, \ldots, X_n) = Y_n$ de θ. Determine el Error Cuadrático Medio de $\hat{g}_2$.

d) Demuestre que para $n = 2$, $ecm_\theta(\hat{g}_1) = ecm_\theta(\hat{g}_2)$.

e) Demuestre que para $n \geq 3$, el estimador $\hat{g}_2$ domina al estimador $\hat{g}_1$.