MA2002-7 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Auxiliar 18: Integrales Complejas

10 de diciembre de 2022

P1. *a)* Calcule el valor de

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz$$

Usando el resultado anterior , muestre que:

$$\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}} d\theta = 2\pi$$

P2. Sea $f(z) = \dfrac{e^z}{z(1-e^{-z})}$

a) Encuentre todas las singularidades de f.

b) Demuestre que son todas singularidades del tipo polo y calcule el orden de cada una.

c) Calcule

$$\oint_{|z|=r} f(z) dz$$

para $0 < r < 2\pi$

P3. Cálcule la siguiente integral, para $a = \dfrac{1}{2}$ y $a = 2$:

$$\oint_{|z|=a} \frac{e^{\pi z}}{z^3 + z} dz$$

P4. Calculé $\displaystyle\oint_{|z|=4} \frac{1}{z^2 senh(z)} dz$, con $|z| = 4$ recorrido en sentido antihorario.

P5. Calcule el valor de la siguiente integral:

$$I = \oint_{\gamma} \frac{1}{z^2 + 4z + 1} dz$$

Donde γ es la circunferencia centrada en $z = 0$ y radio 1.

P6. Usando adecuadamente la formula de Cauchy calcule la siguiente integral.

$$\oint_{|z|=3} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz$$

Indicación: Utilice fracciones parciales.

Resumen

La formula de Cachy:
Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, continua en Ω y holomorfa en $\Omega\setminus\{p\}$. Sea $r > 0$ que $\overline{D(p,r)} \subseteq \Omega$, entonces para todo $z_0 \in D(p,r)$ se tiene la formula integral de Cauchy:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(p,r)} \frac{f(z)}{z - z_0}dz$$

$$f^{(K)}(z_0) = \frac{K!}{2\pi i}\oint_{\partial D(p,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{K+1}}$$

$$\oint_{D(0,1)} \frac{\sin(z)}{z} dz = 0$$

Teorema de los residuos:
* **Singularidad reparable en z_0**
Existe un disco tal que $f(z)$ es holomorfa en $D(z_0, r)\setminus\{z_0\}$, en este caso la integral en una curva cerrada vale 0.

Polo de orden N
$\lim_{z\to z_0}(z - z_0)^{N-1}f(z)$ no existe y el $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)^N f(z)$ existe.

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{p\in\text{Polos Encerrados}} Res(f, p)$$

$$Res(f, z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(N-1)!}\frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}}[(z - z_0)^N f(z)]$$

Corolario: Si dos funciones son holomorfas se cumple L'hopital.

$$\oint_{D(0,1)} \frac{1}{(z-\frac{1}{2})^3} dz = 0$$

$$\lim_{z\to 0} \frac{z}{\sin(z)} \overset{L'H}{=} \frac{1}{\cos(z)} = 1$$

$$\oint_{D(0,1)} \frac{1}{\sin(z)} dz = 2\pi i$$

$$\lim_{z\to 0} \frac{1}{\sin(z)} \cdot z = 1$$

Polo de orden N=1

$$Res\left(\frac{1}{\sin(z)}, 0\right) = \lim_{z\to 0} z \cdot \frac{1}{\sin(z)} = 1$$

P1. *a)* Calcule el valor de

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz = I$$

Usando el resultado anterior , muestre que:

$$\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}} d\theta = 2\pi$$

$$f(z) = e^{z}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{D(0,1)} \frac{f(z)}{z-0}\, dz \overset{\text{formula Cauchy}}{=} f(0) = e^{0} = \underline{1}$$

$$\Rightarrow \boxed{I = 2\pi i}$$

$$z = e^{i\theta}, \quad dz = i e^{i\theta} d\theta$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^{z}}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{e^{e^{i\theta}}}{\cancel{e^{i\theta}}} \cdot \cancel{i}\, \cancel{e^{i\theta}}\, d\theta \overset{\text{por a)}}{=} 2\pi \cancel{i}$$

$$\Leftarrow \boxed{\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}} d\theta = 2\pi}$$

P2. Sea $f(z) = \dfrac{e^z}{z(1-e^{-z})}$

a) Encuentre todas las singularidades de f.

b) Demuestre que son todas singularidades del tipo polo y calcule el orden de cada una.

c) Calcule

$$\oint_{|z|=r} f(z)dz$$

para $0 < r < 2\pi$

a) $z = 0 \implies \frac{1}{z}$ se indefine

$1 = e^{-z} \iff e^{z} = 1 \iff \boxed{z = 2k\pi i \quad k \in \mathbb{Z}}$

b) z: $\lim_{z \to 0} \dfrac{e^z}{1-e^{-z}} = \dfrac{1}{0} = \infty \quad \cancel{\exists}$

z^2: $\lim_{z\to 0} e^z \cdot \left(\dfrac{z}{1-e^{-z}}\right) \overset{\text{Alg}}{=} \lim_{z\to 0} e^z \cdot \lim_{z\to 0} \dfrac{z}{1-e^{-z}}$

$\overset{\text{L'H}}{=} 1 \cdot \lim_{z\to 0} \dfrac{1}{e^{-z}} = 1 \cdot \dfrac{1}{1} = \boxed{1}$

$\boxed{z=0 \quad \text{orden } 2}$

$$\lim_{z \to 2k\pi i} \frac{e^{z}(z-2k\pi i)}{z(1-e^{-z})} = \ldots\ldots = \frac{1}{2k\pi i} \cdot \lim_{z \to 2k\pi i} \frac{(z-2k\pi i)}{1-e^{-z}}$$

$$\overset{L'H}{=} \frac{1}{2k\pi i} \cdot \lim_{z \to 2k\pi i} \frac{1}{e^{-z}} = \boxed{\frac{1}{2k\pi i}}$$

$z = 2k\pi i$

Son polos orden 1

c) $$\oint_{D(0,r)} \frac{e^{z}}{z(1-e^{-z})}\,dz = 2\pi i \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = \boxed{-3\pi i}$$

$0 < r < 2\pi$

Solo está $z=0$

$$\operatorname{Res}(f,0) = \lim_{z \to 0} 1 \cdot \frac{d}{dz}\left(\frac{z e^{z}}{1-e^{-z}}\right)$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{(e^{z} + z e^{z})(1-e^{-z}) - e^{-z}(z e^{z})}{(1-e^{-z})^2}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{(1+z)(e^{z}-1) - z}{(1-e^{-z})^{2}}$$

$$\overset{l'H}{=} \lim_{z\to 0} \frac{(e^{z}-1)+(1+z)e^{z} - 1}{2(1-e^{-z})\cdot(-e^{-z})}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{2e^{z}+ze^{z}-2}{2(1-e^{-z})\cdot(-e^{-z})}$$

Algebra

$$= \left[\lim_{z\to 0} \frac{2e^{z}+ze^{z}-2}{(1-e^{-z})}\right]\cdot\frac{1}{(-2)}$$

$$\overset{l'H}{=} \lim_{z\to 0} \frac{2e^{z}+e^{z}+ze^{z}}{e^{-z}}\cdot\frac{1}{(-2)}$$

$$= \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{(-2)} = \boxed{-\frac{3}{2}}$$

P3. Cálcule la siguiente integral, para $a = \frac{1}{2}$ y $a = 2$:

$$\oint_{|z|=a} \frac{e^{\pi z}}{z^3 + z} dz$$

$$\oint_{|z|=a} \frac{e^{\pi z}}{z(z^2+1)} dz$$

$\{0, -i, i\}$

$$\oint \frac{\overbrace{\left(\frac{e^{\pi z}}{z^2+1}\right)}^{f(z)}}{z} dz = \frac{e^{\pi \cdot 0}}{0^2+1} \cdot 2\pi i = \boxed{\pi i}$$

$D(0, \frac{1}{2})$

b) $a = 2$

Ver que son de grado 1

$$\lim_{z \to 0} \cancel{z} \frac{e^{\pi z}}{\cancel{z}(z^2+1)} = \boxed{1} \Rightarrow \text{orden } 1$$

$$\lim_{z \to i} \frac{e^{\pi z} \cdot \cancel{(z-i)}}{z \cdot (z+i)\cancel{(z-i)}} = \frac{-1}{i(2i)} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

orden 1

$$\lim_{z \to -i} \frac{e^{\pi z}}{z(z-i)} \cdot \frac{\cancel{(z+i)}}{\cancel{(z+i)}} = \frac{e^{-\pi i}}{(-i)(-2i)} = \frac{-1}{-2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\oint_{D(0,2)} f(z)\,dz = \overbrace{2}^{\sum \operatorname{Res}(f,z)} \cdot 2\pi i = \boxed{4\pi i}$$

P4. Calculé $\oint_{|z|=4} \frac{1}{z^2 senh(z)} dz$, con $|z| = 4$ recorrido en sentido antihorario.

Primero notar que $z = k\pi i$ son polos $k \in \mathbb{Z}$

$\boxed{z=0}$ $\lim_{z \to 0} z^3 \cdot \frac{1}{z^2 \sinh(z)} = \lim_{z \to 0} \frac{z}{\sinh(z)}$

$\stackrel{L'H}{=} \lim_{z \to 0} \frac{1}{\cosh(z)} = \boxed{1} \Rightarrow \boxed{z=0}$ orden 3

Propuesto: $z = k\pi i$, $k \neq 0$

es de orden 1

$\lim_{z \to k\pi i} \left(\frac{1}{z^2}\right) \cdot \frac{(z - k\pi i)}{\sinh(z)} = \frac{1}{-k^2\pi^2} \cdot \lim_{z \to k\pi i} \frac{(z - k\pi i)}{\sinh(z)}$

$\underline{1A}$

$$\frac{1}{k^2\pi^2} \cdot \lim_{z \to k\pi i} \frac{1}{\cosh(z)} =$$

$$\frac{e^{k\pi i} + e^{-k\pi i}}{2} = \frac{(-1)^k + (-1)^k}{2} = \boxed{(-1)^k} \checkmark$$

$\pi, \cancel{2\pi} \Rightarrow k=1$

$$\operatorname{Res}(f, \pm\pi i) = \boxed{-1}$$

$$\lim_{z \to 0} \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{z}{\sinh(z)}\right) = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz}\left(\frac{\sinh(z) - \cosh(z) \cdot z}{\sinh(z)^2}\right)$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{\left(\cancel{\cosh(z)} - \cancel{\cosh(z)} - \sinh(z) \cdot z\right)\sinh(z)^2 - \left(2\sinh(z)\cosh(z)\right)\left(\sinh(z) - \cosh(z) \cdot z\right)}{\sinh(z)^4}$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{z \sinh(z)^3 - 2\sinh(z)^2 \cdot \cosh(z) + 2z\sinh(z) \cdot \cosh(z)^2}{\sinh(z)^4}$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{z \cdot \sinh(z)^2 - 2\sinh(z)\cosh(z) + 2z \cdot \cosh(z)^2}{\sinh(z)^3}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{z \to 0} \frac{\cancel{\sinh(z)^2} + 2z \cdot \sinh(z)\cosh(z) - \cancel{2\cosh(z)^2} - 2\sinh(z)^2 + \cancel{2\cosh(z)^2} + 4\sinh(z)\cosh(z) \cdot z}{3\sinh(z)^2}$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{6 \cdot z \cdot \cancel{\sinh(z)} \cdot \cosh(z) - \sinh(z)^{\cancel{2}}}{3\sinh(z)^{\cancel{2}}}$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{6\cosh(z) + 6z\sinh(z) - \cosh(z)}{3\cosh(z)}$$

$$= \frac{6 + 0 - 1}{3} = \boxed{\frac{5}{3}}$$

$$\oint_{D(0,4)} f(z) = 2\pi i \left[\frac{5}{3} + (-1) + (-1) \right] = \boxed{-\frac{1}{3}} \cdot 2\pi i$$

$$= \boxed{-\frac{2\pi i}{3}}$$

P5. Calcule el valor de la siguiente integral:

$$z = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$I = \oint_{\gamma} \frac{1}{z^2 + 4z + 1} dz$$

Donde γ es la circunferencia centrada en $z = 0$ y radio 1.

$$I = \oint_{D(0,1)} \underbrace{\frac{1}{\left(z + \left(\frac{4+\sqrt{12}}{2}\right)\right)}}_{\to f(z) \in H(D(0,1))} \cdot \underbrace{\frac{1}{\left(z + \left(\frac{4-\sqrt{12}}{2}\right)\right)}}_{z_0 \in D(0,1)} dz$$

$$I = \oint_{D(0,1)} \frac{f(z)}{\left(z + \left(\frac{4-\sqrt{12}}{2}\right)\right)} dz = f\left(\frac{4-\sqrt{12}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\left[\left(\frac{4-\sqrt{12}}{2}\right) + \left(\frac{4+\sqrt{12}}{2}\right)\right]} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

P6. Usando adecuadamente la formula de Cauchy calcule la siguiente integral.

$$\oint_{|z|=3} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz$$

Indicación: Utilice fracciones parciales.

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{(z-1)} + \frac{B}{(z-2)}$$

$$= \frac{Az - 2A + Bz - B}{(z-1)(z-2)}$$

$$A + B = 0 \Rightarrow A = -B$$

$$-2A - B = 1$$

$$-A = 1 \Rightarrow A = -1, \quad B = 1$$

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

$$\oint_{D(0,3)} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}\,dz$$

$$= \oint_{D(0,3)} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z-2}\,dz - \oint_{D(0,3)} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z-1}\,dz$$

$$= 2\pi i \left(\sin(\pi 4) + \cos(\pi 4) \right) - 2\pi i \left(\sin(\pi) + \cos(\pi) \right)$$

$$= 2\pi i \left[1 + 1 \right] = \boxed{4\pi i}$$